Профес. Д. П. Рузскій.

КИНЕМАТИКА МАШИНЪ

(съ 174-мя фигурами въ текстѣ).

Лекціи, читанныя въ Кіевскомъ Политехническомъ Институтѣ въ 1906—1907 годахъ.

КІЕВЪ.
Типографія Р. К. Лубковскаго. Б.-Владимирская, № 46. Телеф. № 5.
1908.

Глубокоуважаемому Павлу Семеновичу Чеховичу
отъ автора
19 22/IX 08 г.

Вмѣсто рукописи.

Профес. Д. П. Рузскій.

КИНЕМАТИКА МАШИНЪ

(съ 174-мя фигурами въ текстѣ).

Лекціи, читанныя въ Кіевскомъ Политехническомъ Институтѣ въ 1906—1907 годахъ.

КІЕВЪ.
Типографія Р. К. Лубковскаго. Б.-Владимирская, № 46. Телеф. № 5.
1908.

ВСТУПЛЕНІЕ.

I. Прикладная механика. Существуетъ мнѣніе, которое поддерживается главнымъ образомъ представителями чистой науки, что прикладная механика есть просто собраніе практическихъ задачъ, не объединенныхъ общей идеей и общей цѣлью. Такой взглядъ не только не вѣренъ, но и вреденъ. Вѣдь только при точномъ ограниченіи области науки и правильной постановкѣ ея вопросовъ возможно правильное ея развитіе.

Для выясненія надлежашаго взгляда на прикладную механику обратимся къ авторамъ, посвятившимъ не мало времени и силъ на изслѣдованіе ея вопросовъ.

Во вступленіи къ своему курсу „mécanique et machines"*) Bour устанавливаетъ въ общихъ чертахъ такой взглядъ на прикладную механику. Послѣ разрѣшенія съ большой точностью вопросовъ небесной механики, раціональная механика обратилась къ изслѣдованію другихъ системъ (тѣла твердыя, жидкія и газообразныя), гдѣ миріады маленькихъ частицъ, дѣйствуя другъ на друга на разстояніяхъ, которыя не поддаются никакому измѣренію, ставятъ изслѣдователямъ задачу гораздо болѣе сложную, чѣмъ изслѣдованіе движенія отдѣльныхъ небесныхъ тѣлъ.

Въ виду указанной сложности, вопросъ о движеніи этихъ системъ во многихъ случаяхъ не удается разрѣшить со всей строгостью математики. Но прогрессъ идетъ своей дорогой: каждый день появляются новыя изобрѣтенія, сооружаются огромныя машины, учреждаются гигантскія мануфактуры; естественно, что наука должна до нѣкоторой степени удовлетворять запросамъ практики и придти на помощь промышленности, чтобы дать по крайней мѣрѣ какія-нибудь руково-

*) Томъ I, стр. 13 и 14.

дящія идеи въ рѣшеніи очень сложныхъ вопросовъ, съ которыми приходится здѣсь встрѣчаться. Такимъ образомъ, благодаря трудамъ Navier, Poncelet и Coriolis'a, создается приблизительная, временная наука, именуемая прикладной механикой въ противоположность механикѣ раціональной.

Подобнаго же взгляда придерживается Föppl.*) „Основаніе отдѣленія технической механики, говоритъ онъ, какъ особой отрасли знанія, заключается въ томъ, что механика не въ состояніи еше разрѣшить со всей точностью многихъ вопросовъ, подлежащихъ ея вѣдѣнію. Отношеніе техника и натуралиста къ такимъ вопросамъ различно. Послѣдній, конечно, желаетъ освѣтить темный вопросъ, но онъ не спѣшитъ съ этимъ и откладываетъ до того времени, когда онъ будетъ имѣть возможность разрѣшить его съ надлежащей точностью. Напротивъ того, техникъ подъ давленіемъ необходимости долженъ безъ промедленія приниматься за дѣло и какъ бы то ни было разрѣшить тотъ вопросъ, который стоитъ на его пути".

Нельзя не согласиться, что въ этихъ взглядахъ заключается большая доля истины. Дѣйствительно, существованіе многихъ отдѣловъ прикладной механики, какъ напримѣръ, отдѣла о вредныхъ сопротивленіяхъ, о движеніи воды въ трубахъ и каналахъ и т. п. можно объяснить только такъ, какъ это объясняется цитированными выше авторами. Но съ другой стороны оба эти взгляда, если на нихъ смотрѣть какъ на опредѣленія, не могутъ быть признаны истинными. Въ самомъ дѣлѣ, наука опредѣляется вѣдь не только точностью методовъ изслѣдованія, тѣмъ болѣе что въ прикладной механикѣ неточность допускается иногда умышленно, какъ напримѣръ, при разсчетѣ маховыхъ колесъ,—а главнымъ образомъ областью и цѣлью изслѣдованія. Методы и точность изслѣдованія измѣняются вмѣстѣ съ развитіемъ науки, цѣль же и область изслѣдованія имѣютъ, если не вѣчное, то во всякомъ случаѣ продолжительное значеніе.

Reuleaux, который удѣляетъ много мѣста этому вопросу въ своей Theoretische Kinematik,**) находитъ совершенно неправильнымъ отказывать прикладной механикѣ въ самостоятельности. По его мнѣнію область изслѣдованія прикладной

*) Vorlesung über technische Mechanik. Leipzig. 1898 г. т. I стр. 11.

**) Т. I, гл. 1-ая и 2-ая.

механики составляетъ машинная система и цѣль изслѣдованія—причинная зависимость явленій въ этой системѣ. Съ этой точки зрѣнія прикладная механика является столь же самостоятельной, какъ и небесная механика, которая изслѣдуетъ законы движенія системы небесныхъ тѣлъ, или физика, задачу которой составляетъ изслѣдованіе молекулярныхъ движеній. По отношенію ко всѣмъ этимъ наукамъ раціональная механика занимаетъ совершенно одинаковое положеніе. Это наука по преимуществу методологическая: она вырабатываетъ методы изслѣдованія движенія различныхъ системъ.

Но и со взглядомъ Reuleaux нельзя вполнѣ согласиться, такъ какъ онъ значительно съуживаетъ и цѣль, и область изслѣдованія прикладной механики.

Машинная система есть созданіе человѣческаго генія и странно было бы предполагать, что система эта сама въ себѣ заключаетъ конечную цѣль своего созданія. Правда, Reuleaux старается разыскать машинную систему въ скелетахъ животныхъ, но „эти изысканія, говоритъ проф. В. Л. Кирпичевъ,*) производятъ впечатлѣніе сухой, безплодной схоластики. Совершенно ясно, несмотря ни на какія натяжки, что природа не знаетъ кинематики Reuleaux: достаточно обратить вниманіе на то, что въ природѣ нѣтъ непрерывнаго вращательнаго движенія,—а это главное движеніе машинъ, чаще всего въ нихъ встрѣчающееся, которымъ мы стремимся замѣнить всѣ другія движенія на нашихъ фабрикахъ и заводахъ". Но если машинная система не является цѣлью самой въ себѣ, то, очевидно, она должна быть результатомъ той цѣли, которой она удовлетворяетъ. Цѣль же машины заключается въ преобразованіи энергіи естественныхъ источниковъ въ работу, нужную для человѣка. Иными словами, при помощи машины человѣкъ заставляетъ силы природы совершать ту работу, которая ему не подъ силу ни по качеству, ни по количеству.

Чтобы убѣдиться въ томъ, что машины служатъ указанной цѣли, стоитъ только прогуляться по двумъ тремъ промышленнымъ заведеніямъ и присмотрѣться къ тому, что тамъ происходитъ. Если мы зайдемъ на паровую прядильную фабрику, то увидимъ, какъ на цѣломъ рядѣ станковъ рыхлая ват-

*) Значеніе фантазіи для инженеровъ.

ная лента превращается въ очень крѣпкую и тонкую нить, и несомнѣнно обратимъ вниманіе на то, что всѣ эти станки приводятся въ движеніе упругостью пара въ паровой машинѣ. Здѣсь, стало быть, мы имѣемъ случай преобразованія тепловой энергіи въ работу вытягиванія и закручиванія нити. На водяной мельницѣ энергія падающей воды преобразуется въ работу размалыванія зерна и т. д.

Изъ предыдущаго ясно, что взглядъ Reuleaux на машинную систему, какъ на явленіе природы, изученіе котораго потребовало созданія особой науки, является совершенно фантастическимъ. Да и фактически его опредѣленіе не исчерпываетъ содержанія прикладной механики.

Въ прикладной механикѣ, кромѣ изученія машинной системы, удѣляется значительное мѣсто изученію природы источниковъ энергіи, т. е. изученію свойствъ тѣлъ, которыя являются носителями этой энергіи и посредниками передачи ея въ машинахъ. Да это и понятно, ибо этими свойствами опредѣляется форма и движеніе органовъ ея, непосредственно воспринимающихъ эту энергію, а затѣмъ и весь ея механизмъ. Такъ напримѣръ, термодинамика тщательно изучаетъ различныя тѣла со стороны ихъ способности воспринимать и передавать тепловую энергію, въ гидравликѣ изслѣдуются свойства жидкихъ тѣлъ, которыя чаще всего являются носителями внѣшней потенціальной и внѣшней кинетической энергіи и т. д. Несомнѣнно, что вотъ эта часть прикладной механики, гдѣ изучаются источники энергіи и является наиболѣе существенной, тогда какъ тѣ отдѣлы, гдѣ изучается машинная система, имѣютъ лишь вспомогательное, второстепенное значеніе. Отсюда, принимая во вниманіе ту цѣль, которой служатъ машины, мы можемъ дать прикладной механикѣ слѣдующее опредѣленіе.

П р и к л а д н а я м е х а н и к а е с т ь н а у к а о с п о с о б а х ъ п р е о б р а з о в а н і я э н е р г і и, д о с т а в л я е м о й е с т е с т в е н н ы м и и с т о ч н и к а м и в ъ р а б о т у н у ж н у ю ч е л о в ѣ к у д л я к а к и х ъ - л и б о п р о и з в о д и т е л ь н ы х ъ и л и п р о с т о к у л ь т у р н ы х ъ ц ѣ л е й.

Такъ какъ это преобразованіе энергіи производится при помощи сооруженій, называемыхъ машинами, то названіе прикладная механика можно замѣнить названіемъ т е о р і я м а ш и н ъ. Это послѣднее названіе, котораго придерживается большинство нѣмецкихъ авторовъ, гораздо болѣе соотвѣтствуетъ сути дѣла, чѣмъ первое.

Но названіе теорія машинъ надо понимать, какъ ясно изъ предыдущего, въ болѣе широкомъ смыслѣ, чѣмъ его понимаетъ Reuleaux. Онъ отрицаетъ за машиной цѣль, а признаетъ лишь только особую машинную систему, изученіе свойствъ которой, по его мнѣнію, и составляетъ предметъ прикладной механики.

Мы уже говорили выше, почему съ такимъ взглядомъ нельзя согласиться. Машинная система не является цѣлью въ самой себѣ, а есть результатъ другой цѣли,—цѣли использованія энергіи, доставляемой естественными источниками; и это доказываетъ лучше всего никто иной, какъ самъ Reuleaux. Машинная система характеризуется тѣмъ, какъ мы увидимъ изъ послѣдующего изложенія, что для всякой ея точки возможно единственное, вполнѣ опредѣленное, какъ говоритъ Reuleaux, принужденное движеніе; и это свойство ея есть простой результатъ той цѣли, которой она служитъ. Reuleaux говоритъ: *) „космическая свобода явленій природы приведена въ машинѣ въ такой порядокъ, котораго не въ состояніи поколебать никакая внѣшняя сила".

Дѣйствительно, заставляя работать на себя свободныя силы природы, мы должны самымъ устройствомъ машины точно опредѣлить имъ границы ихъ дѣйствія, чѣмъ и объясняется созданіе машинной системы съ опредѣленнымъ, единственно возможнымъ движеніемъ всѣхъ ея частей.

Но мы до сихъ поръ выясняли только область изслѣдованія прикладной механики и не касались еще вопроса о той цѣли, которую она преслѣдуетъ.

Мы говорили выше, что прикладная механика удѣляетъ много мѣста изученію свойствъ тѣлъ, которыя являются чаше всего носителями той или иной энергіи. Такое изученіе необходимо, въ виду желанія получить изъ даннаго, располагаемаго запаса энергіи, наибольшую возможную работу. На первый взглядъ такое желаніе можетъ показаться страннымъ, въ виду того, что, какъ извѣстно, энергія не исчезаетъ, а только преобразуется, принимаетъ другую форму. Но дѣло въ томъ, что въ прикладной механикѣ за энергію, какъ таковую, принимает-

---

*) Theorethische Kinematik, стр. 37-ая.

ся лишь та энергія, которую можно непосредственно обратить въ работу, а для этого требуется, чтобы энергія обладала извѣстнымъ напряженіемъ. Пояснимъ это на простомъ примѣрѣ. Пусть въ нашемъ распоряженіи имѣются два водопада: въ одномъ 200 kgr. воды въ секунду падаютъ съ высоты 10 mtr., а въ другомъ 20000 kgr. воды въ секунду падаютъ съ высоты 0,1 mtr. И въ томъ и другомъ случаѣ мы располагаемъ однимъ и тѣмъ же запасомъ энергіи въ 2000 kgr. mtr. въ секунду; но въ первомъ случаѣ, благодаря значительной высотѣ паденія, мы можемъ до 80% энергіи использовать для нужной намъ работы, а во второмъ случаѣ мы едва ли сумѣемъ использовать и 10%.

Вся неиспользованная нами часть энергіи не пропадетъ, но приметъ такую форму и будетъ обладать столь малымъ напряженіемъ, что ея использованіе окажется совершенно невозможнымъ и потому съ точки зрѣнія прикладной механики будетъ считаться совершенно потерянной. Слѣдовательно, для того чтобы энергія, доставляемая естественными источниками, могла быть использована для техническихъ цѣлей, она должна обладать извѣстнымъ напряженіемъ. Такъ какъ запасы такой энергіи сравнительно не такъ значительны, то отсюда и понятно стремленіе изыскать способъ использованія возможно большей части этой энергіи.

Такимъ образомъ, **главная цѣль прикладной механики заключается въ выясненіи тѣхъ условій, при наличности которыхъ изъ даннаго и удобнаго для пользованія запаса энергіи можно извлечь наибольшую работу.**

Кромѣ этой главной цѣли прикладная механика имѣетъ и другія не столь важныя задачи, какъ напримѣръ, прочность частей машины при наименьшей затратѣ матеріала, простоту устройства и т. п.

И такъ, все вышеизложенное приводитъ насъ къ заключенію, что прикладная механика имѣетъ и свою собственную область и свою собственную цѣль изслѣдованія, и потому нельзя не согласиться съ Reuleaux, который говоритъ: *) „я называю ее (прикладную механику) наукой и не думаю, чтобы это было слишкомъ большой претензіей съ моей стороны; если

---

*) Theorethische Kinematik, стр. 39, Braunschweig 1875.

угодно, называйте ее наукой второго или третьяго порядка; она пользуется въ своей области изслѣдованія научнымъ методомъ и мало по малу завоевываетъ свою самостоятельность, которая сдѣлала необходимымъ ея отдѣленіе (отъ другихъ наукъ)".

Что необходимость такого отдѣленія области прикладной механики отъ области другихъ физико-механическихъ наукъ чувствовалась очень давно, можно доказать историческими справками.

Въ концѣ 18-го столѣтія вопросы прикладной механики разрабатывались физиками и механиками рядомъ съ другими вопросами; но въ 1794 году, при открытіи (первой въ свѣтѣ) политехнической школы въ Парижѣ, Monge въ своей инструкціи предложилъ установить особый курсъ элементовъ машинъ, что и было приведено въ исполненіе Betancourt'омъ, Lanz'емъ и Hâchett'омъ. Этими учеными впервые дѣлаются попытки систематизировать подлежащій изученію матеріалъ, разобраться въ томъ понятіи, которое обозначается словомъ машина и расчленить его на составныя части. Съ тѣхъ поръ вопросы прикладной механики подвергаются самостоятельной разработкѣ.

2. Машинная система. Изъ предыдущаго достаточно ясно, что содержаніе прикладной механики можно разбить на два большихъ отдѣла: 1) на изученіе свойствъ тѣлъ, являющихся посредниками въ передачѣ энергіи въ машинахъ и 2) на изученіе механическихъ свойствъ той системы, которая служитъ для воспріятія и передачи этой энергіи.

Мы говорили, что машинная система обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что каждая ея точка имѣетъ вполнѣ опредѣленное единственно возможное, принужденное движеніе, независимо отъ силъ, которыя могутъ быть къ ней приложены. Въ дальнѣйшемъ изложеніи выясняются тѣ условія, которыя должны быть соблюдены для осуществленія указаннаго свойства машины. Однако же изъ того обстоятельства, что черезъ части машины отъ одной точки къ другой передаются усилія, можно непосредственно заключить, что машинная система должна состоять изъ твердыхъ тѣлъ. Отсюда слѣдуетъ, что изученіе машинной системы, механика машинной системы, сводится къ механикѣ твердаго тѣла. Но однако же въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, части машины могутъ быть выполнены и не изъ твердыхъ тѣлъ. Въ томъ случаѣ, если часть машины подвергается постоянно только растягивающимъ усиліямъ, она можетъ быть выполнена изъ тѣла гибкаго: ремня, каната и т. п. Обратно, въ случаѣ воздѣйствія только сжимающихъ силъ, возможно примѣненіе въ машинахъ капельныхъ несжимаемыхъ жидкостей. Наконецъ, въ качествѣ органовъ машинъ могутъ съ успѣхомъ примѣняться искусственно изготовленныя пружинныя тѣла. Извѣстно, что абсолютно твердыхъ тѣлъ не существуетъ: всякое, такъ называемое, твердое тѣло болѣе или менѣе деформируется подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, такъ что разница между твердымъ тѣломъ и пружинами, которыя характеризуются своей податливостью, не качественная, а чисто количественная.

3. Кинематика машинъ. Изученіе машинной системы, какъ и всякой другой механической системы, можетъ быть двоякое: кинематическое и динамическое.

Кинематическое изученіе машинной системы и составляетъ предметъ кинематики машинъ, или иначе теоріи механизмовъ, такъ какъ механизмомъ принято называть всякое устройство, имѣющее цѣлью воспроизведеніе опредѣленнаго движенія. Механизмъ есть понятіе болѣе общее, чѣмъ машина, ибо послѣдняя становится механизмомъ только тогда, когда мы отвлекаемся отъ дѣйствующихъ въ ней силъ, и имѣетъ цѣлью передать работу при опредѣленномъ движеніи. Механизмомъ въ тѣсномъ смыслѣ слова являются, напримѣръ, часы, цѣль устройства которыхъ—опредѣленное движеніе стрѣлокъ, или устройства, служащія для опредѣленнаго движенія астрономическихъ приборовъ.

Для удобства изложенія мы разобьемъ содержаніе курса на два отдѣла: 1) изученіе плоскихъ системъ и 2) изученіе системъ пространственныхъ. Наиболѣе важное значеніе имѣетъ отдѣлъ первый, такъ какъ по большей части всѣ точки машины совершаютъ движеніе въ одной плоскости и такъ какъ онѣ обыкновенно имѣютъ плоскость симметріи, поэтому движеніе цѣлой части можетъ быть охарактеризовано движеніемъ ея средняго сѣченія.

ГЛАВА I-ая.

Кинематика плоской неизмѣняемой системы.

4. Геометрическое представленіе движенія. Какъ извѣстно, движеніе неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости въ высшей степени наглядно изображается каченіемъ одной кривой, неизмѣнно связанной съ движущейся фигурой, по другой—неподвижной кривой. Первая кривая, представляющая собою геометрическое мѣсто мгновенныхъ центровъ вращенія въ подвижной фигурѣ, называется серполоидой, вторая—геометрическое мѣсто мгновенныхъ центровъ на плоскости—называется полоидой. Точка соприкосновенія этихъ кривыхъ является для даннаго момента мгновеннымъ центромъ вращенія.

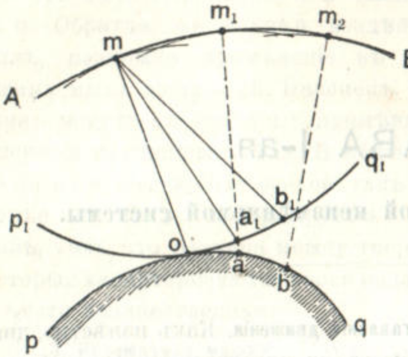
Такое изображеніе движенія чрезвычайно удобно для кинематики машинъ, ибо части машинъ очень часто очерчиваются по этимъ двумъ кривымъ, чему примѣромъ можетъ служить вагонное колесо и рельсъ и колеса фрикціонной передачи,—или очень просто строятся, если, какъ напримѣръ, при построеніи зубчатыхъ колесъ, извѣстны эти кривыя.

Въ виду этого при дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ предполагать эти кривыя извѣстными, а впослѣдствіи покажемъ, какъ онѣ строятся по даннымъ условіямъ движенія.

Замѣтимъ кромѣ того, что такое представленіе движенія благопріятно въ томъ отношеніи, что ведетъ къ очень простому приблизительному графическому рѣшенію кинематическихъ задачъ во всякомъ случаѣ, какъ бы онъ ни былъ сложенъ.

5. Траекторія точки. Пусть серполоида p_1q_1 (фиг. 1) катится по полоидѣ pq; требуется найти траекторію точки m, неизмѣнно связанной съ серполоидой.

Допустимъ, что кривыя pq и p_1q_1 соприкасаются въ точкѣ o. Эта точка въ данный моментъ времени будетъ служить мгновеннымъ центромъ вращенія для точки m, такъ что въ весьма малый промежутокъ времени точка m опишетъ элементъ окружности около точки o радіусомъ om. Пусть въ слѣдующій моментъ времени кривыя pq и p_1q_1 будутъ соприкасаться точками a и a_1, причемъ $\breve{oa}=\breve{oa_1}$, такъ какъ каченіе происходитъ безъ скольженія; тогда точка m будетъ вращаться около a и опишетъ элементъ окружности радіусомъ a_1m. Въ слѣдующій моментъ времеми, когда кривыя pq и p_1q_1 соприкоснутся точками b и b_1, точка m опишетъ элементъ окружности около точки b радіусомъ b_1m и т. д.



Фиг. 1.

Очевидно, что кривая AB, огибающая всѣ эти элементарныя дуги окружностей и будетъ траекторіей точки m.

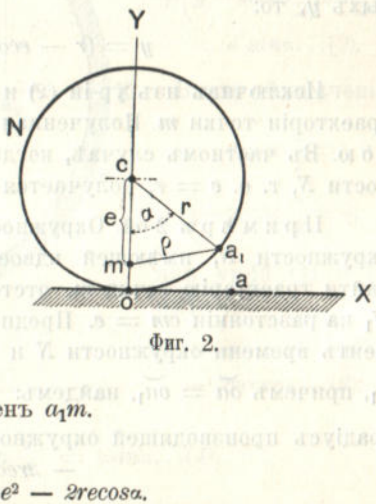
Отсюда мы заключаемъ, что **траекторія точки m есть огибающая круга, центръ котораго движется по полоидѣ, а радіусъ измѣняется по закону радіусовъ векторовъ серполоиды, если точка m принята за ея полюсъ.**

Замѣтимъ, что мгновенные радіусы om, a_1m, b_1m и т. д. всегда нормальны къ траекторіи въ соотвѣтственныхъ точкахъ (напр. om—нормаль къ AB въ точкѣ m), ибо огибающая и огибаемая всегда имѣютъ общую нормаль въ точкѣ соприкосновенія, а радіусы om, a_1m и т. д. нормальны къ огибаемой, такъ какъ огибаемая есть окружность.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, какъ мы увидимъ изъ разобранныхъ ниже примѣровъ, задача о нахожденіи траекторіи точки разрѣшается весьма просто аналитически. Но слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что, каковы бы ни были кривыя pq и p_1q_1,—онѣ могутъ быть даже не заданы уравненіями,—задача эта весьма просто съ достаточной точностью можетъ быть рѣшена графическимъ путемъ. Для этого стоитъ только описать нѣсколько окружностей изъ центровъ o, a, b и т. д. радіусами om, a_1m, b_1m и т. д., а затѣмъ провести къ нимъ при помощи лекала приблизительно огибающую.

Примѣръ 1-ый. Пусть полоида будетъ прямая oX (фиг. 2), а серполоида окружность N радіуса r. Отыщемъ траекторію точки m, находящейся отъ центра окружности на разстояніи $cm=e$.

Мы знаемъ, что траекторія точки m будетъ огибающая окружности, центръ которой движется по прямой oX, а радіусы измѣняются по закону радіусовъ векторовъ окружности N, если примемъ точку m за полюсъ. Найдемъ уравненіе этой окружности, принявъ o за начало прямоугольныхъ осей координатъ XoY. Пусть черезъ нѣкоторый промежутокъ времени придутъ въ соприкосновеніе точки a и a_1. Соединимъ a_1 съ c и m прямыми и обозначимъ уголъ a_1cm черезъ α. Очевидно, что въ разсматриваемый моментъ времени радіусъ искомой окружности будетъ равенъ a_1m.



Фиг. 2.

Изъ $\triangle\, mca_1$ имѣемъ:

$$\rho^2 = r^2 + e^2 - 2re\cos\alpha.$$

Центръ окружности въ разсматриваемый моментъ будетъ лежать въ точкѣ a, такъ что его координаты будутъ

$$x_1 = \alpha r \text{ и } y_1 = o,$$

слѣдовательно, ур-іе искомой окружности напишется такъ:

$$(x - \alpha r)^2 + y^2 = \rho^2 = r^2 + e^2 - 2re\cos\alpha \;.\;.\;.\; (1).$$

Перемѣннымъ параметромъ здѣсь является уголъ α, такъ какъ этотъ уголъ, при различныхъ положеніяхъ окружности N, принимаетъ различныя значенія.

Взявъ отъ ур-ія (*1*) частную производную по α, получимъ:

$$-2\,(x - \alpha r)\,r = 2re\sin\alpha,$$

откуда

$$x = \alpha r - e\sin\alpha \;.\;.\;.\; (2).$$

Чтобы получить ур-іе огибающей, надо изъ ур-ій (*1*) и (*2*) исключить α. Подставляя выраженіе (*2*) въ ур-іе (*1*), получимъ:

$$e^2\sin^2\alpha + y^2 = r^2 + e^2 - 2re\cos\alpha,$$

откуда:

$$y = \pm\,(r - e\cos\alpha);$$

такъ какъ искомая кривая лежитъ въ области положительныхъ y, то:

$$y = (r - e\cos\alpha)\;.\;.\;.\;(3).$$

Исключивъ изъ ур-ій (*2*) и (*3*) уголъ α, получимъ ур-іе траекторіи точки m. Полученная кривая называется трохоидою. Въ частномъ случаѣ, когда точка m лежитъ на окружности N, т. е. $e = r$, получается циклоида.

Примѣръ 2-ой. Окружность N_1 (фиг. 3) катится внутри окружности N, имѣющей вдвое большій радіусъ; требуется найти траекторію точки m, отстоящей отъ центра окружности N_1 на разстояніи $cm = e$. Предполагая, что въ слѣдующій моментъ времени окружности N и N_1 соприкоснутся точками a и a_1, причемъ $\overset{\smile}{oa} = \overset{\smile}{oa_1}$, найдемъ:

(радіусъ производящей окружности)$^2 = \rho^2 = ma_1^2 = r^2 + e^2 - 2re\cos\alpha$;

координаты центра этой окружности:

$$x_1 = Oa_2 = 2r\sin\beta \text{ и } y_1 = a_2a = 2r\cos\beta,$$

или въ виду равенства дугъ oa и oa_1,

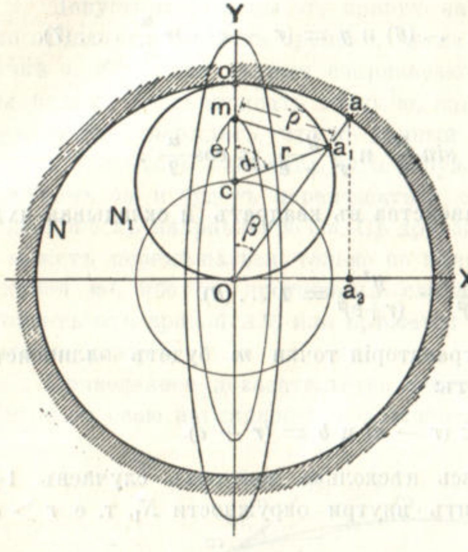
$$x_1 = 2r\sin\frac{\alpha}{2} \text{ и } y_1 = 2r\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Теперь легко написать ур-іе производящей окружности:

$$\left(x - 2r\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - 2r\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = r^2 + e^2 - 2re\cos\alpha\;.\;.\;.\;(1).$$

Для нахожденія огибающей беремъ отъ этого ур-ія частную производную по α; имѣемъ:

$$-2\left(x-2r\sin\frac{\alpha}{2}\right)2r\cos\frac{\alpha}{2}\frac{1}{2}+2\left(y-2r\cos\frac{\alpha}{2}\right)2r\sin\frac{\alpha}{2}\frac{1}{2}=$$
$$=2re\sin\alpha,$$



Фиг. 3.

что послѣ упрощенія даетъ:

$$-\left(x-2r\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}+$$
$$+\left(y-2r\cos\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}=$$
$$=e\sin\alpha\ldots(2).$$

Введя обозначенія:

$$x-2r\sin\frac{\alpha}{2}=\xi \text{ и}$$

$$y-2r\cos\frac{\alpha}{2}=\eta,$$

изъ ур-ій (1) и (2) имѣемъ:

$$\xi^2+\eta^2=r^2+e^2-$$
$$-2re\cos\alpha\ldots(3);$$

$$-\xi\cos\frac{\alpha}{2}+\eta\sin\frac{\alpha}{2}=e\sin\alpha\ldots(4).$$

Возвышая ур-іе (4) въ квадратъ и вычитая изъ (3), получимъ:

$$\xi^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\xi\eta\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\eta^2\cos^2\frac{\alpha}{2}=r^2+e^2\cos^2\alpha-$$
$$-2re\cos\alpha,$$

откуда:

$$\xi\sin\frac{\alpha}{2}+\eta\cos\frac{\alpha}{2}=-r+e\cos\alpha\ldots(5)$$

Извлекая корень, мы должны взять передъ второй частью знакъ —, въ справедливости чего можно убѣдиться, примѣняя ур-іе (5) къ начальному положенію. Знакъ $+$ соотвѣтствовалъ бы каченію N_1 по N снаружи. Теперь изъ ур-ій (4) и (5) легко найти, что

$$\xi = -(r+e)\sin\frac{\alpha}{2} \text{ и } \eta = (e-r)\cos\frac{\alpha}{2}$$

и

$$x = (r-e)\sin\frac{\alpha}{2}\ \ldots (6) \text{ и } y = (r+e)\cos\frac{\alpha}{2}\ \ldots (7).$$

Отсюда имѣемъ:

$$\frac{x}{r-e} = \sin\frac{\alpha}{2} \text{ и } \frac{y}{r+e} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Возвышая оба равенства въ квадратъ и складывая ихъ, получимъ:

$$\frac{x^2}{(r-e)^2} + \frac{y^2}{(r+e)^2} = 1\ \ldots (8).$$

Слѣдовательно, траекторія точки m будетъ эллипсисъ, полуоси котораго будутъ:

$$a = \pm(r-e) \text{ и } b = (r+e).$$

Разсмотримъ здѣсь нѣсколько частныхъ случаевъ. 1-й случай. Точка m лежитъ внутри окружности N_1, т. е. $r > e$; тогда:

$$a = r - e,\ b = r + e \text{ и } a + b = 2r,$$

т. е. сумма полуосей эллипса = радіусу неподвижной окружности.

2-й случай. Точка m лежитъ внѣ окружности N_1, т. е. $e > r$; тогда:

$$a = e - r,\ b = r + e \text{ и } b - a = 2r,$$

т. е. разность полуосей эллипса = радіусу неподвижной окружности.

3-й случай. Точка m совпадаетъ съ c, т. е. $e = o$, тогда ур-іе (8) обращается въ ур-іе окружности съ центромъ въ O и радіусомъ r.

4-й случай. Точка m лежитъ на окружности N_1, т. $e = r$; тогда получимъ:

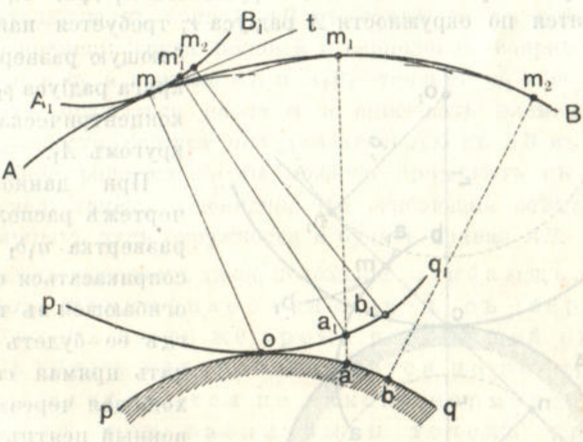
$$x = o,$$

т. е. траекторія всякой точки, лежащей на катящейся окружности, будетъ діаметральная прямая.

6. Огибающая подвижной кривой. Будемъ теперь искать ту кривую AB (фиг. 4), которую огибаетъ при своемъ движеніи неизмѣнно связанная съ серполоидой кривая A_1B_1.

Допустимъ, что мы эту кривую нашли, и предположимъ, что въ данный моментъ времени, когда полюсъ находится въ точкѣ o, обѣ наши кривыя соприкасаются въ точкѣ m. Если мы будемъ разсматривать точку m, какъ точку кривой A_1B_1, то можемъ утверждать, что въ данный моментъ времени она будетъ описывать элементъ дуги окружности около центра o радіусомъ om и будетъ перемѣщаться, слѣдовательно, перпендикулярно къ направленію om. Съ другой стороны, та же точка m можетъ перемѣщаться только по направленію общей касательной mt, ибо въ противномъ случаѣ кривая A_1B_1, или отойдетъ отъ кривой AB, или врѣжется въ нее, чего, понятно, быть не можетъ.

Приведенное доказательство послѣдняго положенія, несмотря на свою наглядность, недостаточно строго, поэтому мы



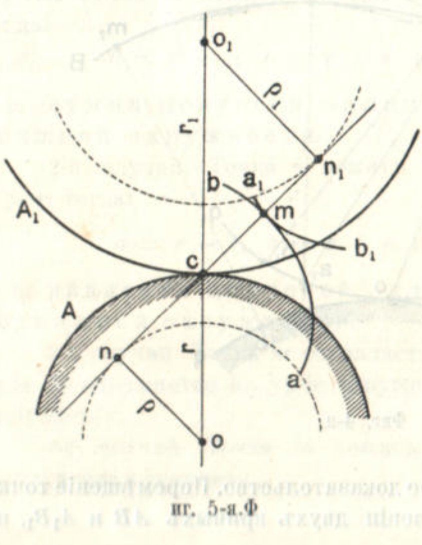
Фиг. 4-я.

приведемъ здѣсь еще другое доказательство. Перемѣщеніе точки m, какъ точки соприкосновенія двухъ кривыхъ AB и A_1B_1, по первой кривой (абсолютное перемѣщеніе) слагается геометрически изъ двухъ перемѣщеній: изъ перемѣщенія точки m по кривой A_1B_1 (относительное перемѣщеніе) и перемѣщенія той точки кривой A_1B_1, съ которой въ данный моментъ точка m совпадаетъ (перемѣщеніе переносного движенія). Намъ нужно разыскать направленіе этого послѣдняго перемѣщенія. Такъ какъ два первыхъ перемѣщенія, при данномъ расположеніи кривыхъ (фиг. 4), имѣютъ направленіе касательной mt, то, очевидно, что и послѣднее перемѣщеніе, какъ геометрическая разность двухъ первыхъ, имѣетъ то же направленіе.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что точка m кривой A_1B_1 перемѣщается нормально къ om и въ то же время можетъ перемѣщаться только по направленію mt. Отсюда слѣдуетъ, что mt перпендикулярно къ om; такимъ образомъ, мы заключаемъ, что **нормаль въ точкѣ соприкосновенія подвижной кривой съ ея огибающей проходитъ черезъ соотвѣтствующій мгновенный центръ вращенія.**

Иногда только этого положенія достаточно для нахожденія огибающихъ.

Примѣръ. Положимъ, окружность A_1 (фиг. 5), радіуса r_1, катится по окружности A радіуса r; требуется найти огибающую развертки a_1b_1 круга радіуса $\rho_1 = o_1n_1$, концентрическаго съ кругомъ A_1.



Фиг. 5-я.

При данномъ на чертежѣ расположеніи, развертка a_1b_1 будетъ соприкасаться со своей огибающей въ точкѣ m, гдѣ ее будетъ встрѣчать прямая cn_1, проходящая черезъ мгновенный центръ вращенія c и касательная къ развертываемой окружности, что вытекаетъ съ одной стороны изъ свойствъ развертки, а съ другой стороны—изъ доказаннаго выше положенія.

Но легко видѣть, что прямая n_1n будетъ всегда касаться окружности радіуса ρ, концентрической съ окружностью A. Дѣйствительно, опустимъ изъ o на nn_1 перпендикуляръ on; тогда изъ подобныхъ треугольниковъ ocn и o_1cn_1 имѣемъ:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\rho}{\rho_1}, \text{ откуда } \rho = const.$$

Слѣдовательно, огибающая развертки a_1b_1 обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что нормали въ различныхъ ея точкахъ будутъ касаться одной и той же окружности. Очевидно, что ab есть развертка окружности радіуса ρ, концентрической съ окружностью A.

7. Нахожденіе огибающей. Но, однако, знаніе указаннаго свойства не всегда достаточно для нахожденія огибающей подвижной кривой. Для этой цѣли нужно поискать другихъ средствъ.

Будемъ разсуждать такъ. Въ разсматриваемый моментъ времени точка m кривой A_1B_1 (фиг. 4) будетъ вращаться около o и описывать элементарную дугу окружности радіуса om, касательную къ кривой AB въ точкѣ m; въ слѣдующій моментъ времени, когда полоида и серполоида соприкоснутся точками a и a_1, а кривыя AB и A_1B_1—точками m_1 и m'_1, точка m'_1 будетъ вращаться около a и описывать элементарную дугу окружности радіуса $a_1m'_1$, касательную къ AB въ точкѣ m_1. Подобное разсужденіе мы можемъ примѣнить къ какому угодно числу точекъ. Очевидно, что огибающая всѣхъ этихъ элементарныхъ дугъ окружности и будетъ кривая AB.

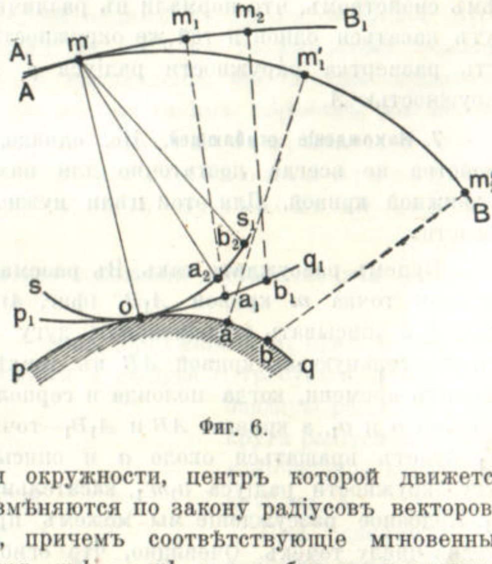
Отсюда вытекаетъ такое положеніе: огибающая кривой A_1B_1, неизмѣнно связанной съ серполоидой, будетъ въ то же время огибающей окружности, центръ которой движется по полоидѣ, а радіусы измѣняются по закону нормалей, проведенныхъ изъ различныхъ точекъ кривой A_1B_1 до встрѣчи съ серполоидой.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что при помощи этого положенія можно во всякомъ, даже очень сложномъ случаѣ, найти огибающую графическимъ путемъ.

Существуютъ однако два способа, при помощи которыхъ задача о нахожденіи огибающей подвижной кривой сводится въ нѣкоторыхъ случаяхъ къ предыдущей, болѣе простой задачѣ, о нахожденіи траекторіи точки. Перейдемъ къ изложенію этихъ способовъ.

8. Теорема Камуса. Положимъ, что при каченіи кривой ss_1 (фиг. 6) по кривой pq неизмѣнно связанная съ первой точка m опишетъ траекторію AB и при каченіи ss_1 по кривой p_1q_1 та же точка опишетъ кривую A_1B_1. Если мы неизмѣнно соединимъ кривую A_1B_1 съ кривой p_1q_1 и покатимъ послѣднюю по pq, то кривая A_1B_1 будетъ огибать кривую AB.

Въ этомъ заключается теорема Камуса.

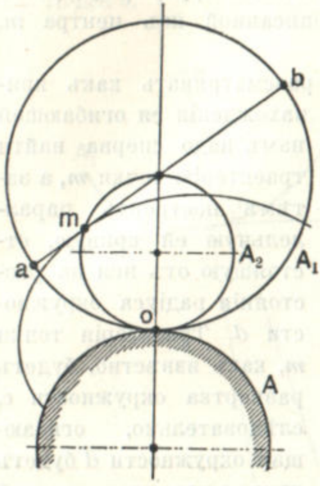


Фиг. 6.

Для ея доказательства вспомнимъ ранѣе доказанныя положенія. Мы знаемъ, что кривая A_1B_1 есть огибающая окружности, центръ которой движется по p_1q_1, а радіусы измѣняются по закону радіусовъ векторовъ mo, ma_2, mb_2 и т. д., причемъ соотвѣтствующіе мгновенные радіусы mo, $m_1a_1 = ma_2$, $m_2b_1' = mb_2$ и т. д. будутъ нормальны къ кривой A_1B_1. Но кривая AB есть также огибающая окружности, центръ которой движется по pq, а радіусы измѣняются по закону радіусовъ векторовъ mo, ma_2, mb_2 и т. д. или, въ силу равенства этихъ радіусовъ нормалямъ къ A_1B_1,—по закону этихъ нормалей, а отсюда и слѣдуетъ, что AB есть огибащая A_1B_1.

Примѣръ. Положимъ, что окружность A_1 (фиг. 7) катится по окружности A; требуется найти огибающую діаметра ab первой окружности.

Мы знаемъ, что если мы покатимъ внутри окружности A_1 окружность A_2, имѣющую вдвое меньшій радіусъ, то ея точка m опишетъ діаметръ ab. Слѣдовательно, діаметръ ab при каченіи A_1 по A будетъ огибать ту кривую, которую при каченіи A_2 по A опишетъ точка m. Кривая эта называется эпициклоидой.

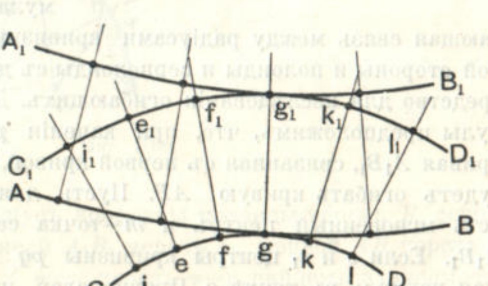


Фиг. 7.

9. Параллельныя кривыя. Докажемъ, что если мы нашли пару огибающихъ, то кривыя, имъ параллельныя и равно отъ нихъ отстоящія, будутъ также взаимно огибающія.

Кривыми параллельными между собою называются такія кривыя, разстояніе между которыми по ихъ общимъ нормалямъ есть величина постоянная. Напримѣръ, кривыя CD и C_1D_1 (фиг. 8) будутъ параллельны между собою, если отрѣзки общихъ нормалей между ними ii_1, ee_1, ff_1 и т. д. равны между собою.

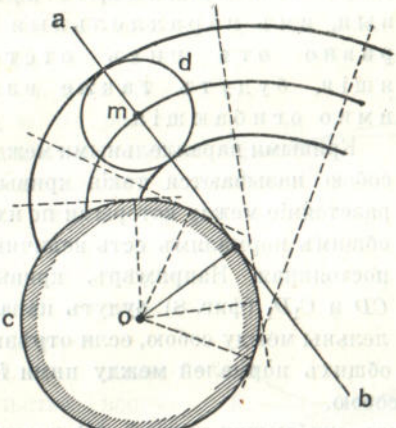
Вообразимъ, что CD есть огибающая кривой AB; построимъ кривыя A_1B_1 и C_1D_1 имъ параллельныя и равно отъ нихъ отстоящія. Допустимъ, что въ данный моментъ AB и CD соприкасаются въ точкѣ g; очевидно, что въ то же время A_1B_1 и C_1D_1 будутъ соприкасаться въ точкѣ g_1. Если въ слѣдующій моментъ AB и CD соприкоснутся въ точкѣ k, то A_1B_1 и C_1D_1 соприкоснутся въ точкѣ k_1. Если, слѣдовательно, кривая AB при своемъ перемѣщеніи будетъ постоянно соприкасаться съ кривой CD, то A_1B_1, оставаясь параллельной AB, будетъ постоянно соприкасаться съ C_1D_1. Этимъ наше положеніе и доказывается.



Фиг. 8-я.

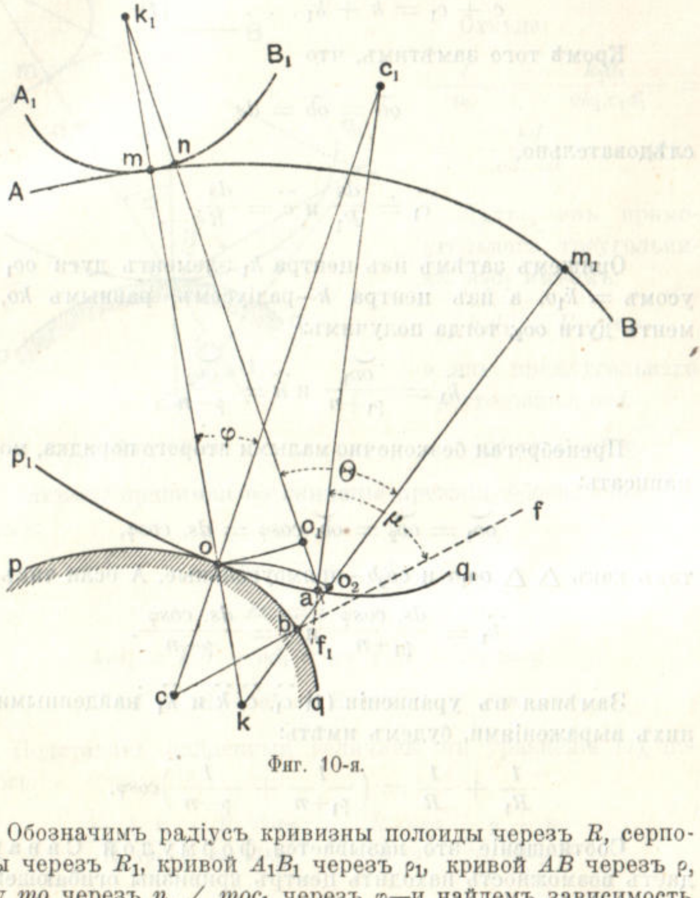
Примѣръ. Этимъ положеніемъ особенно удобно пользоваться при нахожденіи огибающихъ перемѣщающейся окружности. Пусть прямая ab (фиг. 9) катится по кругу c; требуется найти огибающую окружности d, описанной изъ центра m, лежащего на прямой ab.

Такъ какъ окружность можно разсматривать какъ кривую, параллельную центру, то для нахожденія ея огибающей намъ надо сперва найти траекторію точки m, а затѣмъ построить параллельную ей кривую, отстоящую отъ нея на разстояніи радіуса окружности d. Траекторія точки m, какъ извѣстно, будетъ развертка окружности c, слѣдовательно, огибающая окружности d будетъ кривая, параллельная этой разверткѣ, т. е тоже развертка окружности c, ибо параллельная разверткѣ есть тоже развертка.



Фиг. 9-я

10. Формула Савари. Формула Савари, устанавливающая связь между радіусами кривизны огибающихъ съ одной стороны и полоиды и серполоиды съ другой, даетъ удобное средство для изслѣдованія огибающихъ. Для вывода этой формулы предположимъ, что, при каченіи p_1q_1 (фиг. 10) по pq, кривая A_1B_1, связанная съ первой кривой, при своемъ движеніи будетъ огибать кривую AB. Пусть для даннаго момента o есть мгновенный центръ и m—точка соприкосновенія AB и A_1B_1. Если c и c_1 центры кривизны pq и p_1q_1, то cc_1 ихъ общая нормаль въ точкѣ o. Предполагая, что въ слѣдующій моментъ на полоидѣ и серполоидѣ придутъ въ соприкосновеніе точки b и a, мы найдемъ точки n и m_1, которыми соприкоснутся въ тотъ же моментъ кривыя A_1B_1 и AB, если изъ a и b проведемъ къ нимъ соотвѣтственно нормали. Очевидно, что центры кривизны k_1 и k кривыхъ A_1B_1 и AB по отношенію къ точкѣ m будутъ лежать: первый на пересѣченіи om и an, второй—на пересѣченіи bm_1 и om. Наконецъ, легко сообразить, что c_1a есть нормаль къ p_1q_1 въ точкѣ a и cb—нормаль къ pq въ точкѣ b.



Фиг. 10-я.

Обозначимъ радіусъ кривизны полоиды черезъ R, серполоиды черезъ R_1, кривой A_1B_1 черезъ ρ_1, кривой AB черезъ ρ, длину mo черезъ n, $\angle\ moc_1$ черезъ φ—и найдемъ зависимость между этими величинами.

Замѣтимъ, что когда придутъ въ соприкосновеніе точки b и a, то вся фигура повернется изъ даннаго положенія на уголъ, равный углу между нормалями cf и c_1f_1; а этотъ уголъ, какъ внѣшній, равенъ суммѣ внутреннихъ угловъ, съ нимъ не смежныхъ, т. е. $\mu = \widehat{c} + \widehat{c_1}$.

Съ другой стороны, при совпаденіи точекъ b и a, нормаль an совпадетъ съ нормалью bm_1, т. е. фигура повернется на уголъ Θ, который, очевидно, равенъ суммѣ $\widehat{k_1}+\widehat{k}$. Отсюда

$$\widehat{c}+\widehat{c_1}=\widehat{k}+\widehat{k_1}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

Кромѣ того замѣтимъ, что

$$\breve{oa}=\breve{ob}=ds$$

слѣдовательно,

$$\widehat{c_1}=\frac{ds}{R_1}\text{ и }\widehat{c}=\frac{ds}{R}.$$

Опишемъ затѣмъ изъ центра k_1 элементъ дуги oo_1 радіусомъ $=k_1o$, а изъ центра k—радіусомъ, равнымъ ko, элементъ дуги oo_2; тогда получимъ:

$$\widehat{k_1}=\frac{\breve{oo_1}}{\rho_1+n}\text{ и }\widehat{k}=\frac{\breve{oo_2}}{\rho-n}.$$

Пренебрегая безконечно малыми второго порядка, можемъ написать:

$$\breve{oo_1}=\breve{oo_2}=\breve{ob}.\cos\varphi=ds.\cos\varphi,$$

такъ какъ $\triangle\triangle\; oo_1a$ и oo_2b—прямоугольные. А если такъ, то

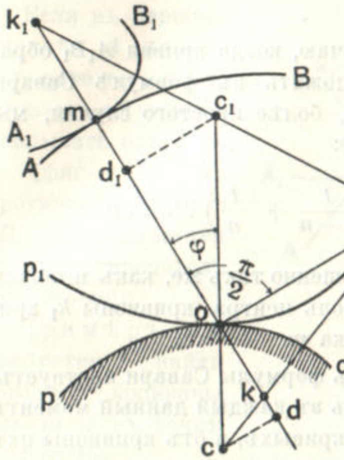
$$\widehat{k_1}=\frac{ds.\cos\varphi}{\rho_1+n}\text{ и }\widehat{k}=\frac{ds.\cos\varphi}{\rho-n}.$$

Замѣняя въ уравненіи (*1*) $\widehat{c_1}$, $\widehat{c}$, $\widehat{k}$ и $\widehat{k_1}$ найденными для нихъ выраженіями, будемъ имѣть:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R}=\left(\frac{1}{\rho_1+n}+\frac{1}{\rho-n}\right)\cos\varphi.$$

Соотношеніе это называется формулой Савари и даетъ возможность находить центръ кривизны огибающей или огибаемой, если извѣстны всѣ остальныя величины.

Эта формула приводитъ къ очень простому построенію. Проведемъ прямую k_1c_1 (фиг. 11) до пересѣченія съ oe, перпендикуляромъ къ k_1k въ точкѣ o; точку e соединимъ съ c, затѣмъ продолжимъ k_1o до пересѣченія съ ec въ точкѣ k, которая и будетъ искомымъ центромъ кривизны кривой AB. Для доказательства этого опустимъ изъ точекъ c и c_1 перпендикуляры cd и c_1d_1 на k_1k. Уголъ k_1oc_1 обозначимъ черезъ φ. Тогда изъ подобія треугольниковъ $k_1d_1c_1$ и k_1oe, oek и kcd получимъ:



Фиг. 11-ая.

$$\frac{oe}{c_1d_1} = \frac{ok_1}{k_1d};\ \frac{oe}{cd} = \frac{ok}{kd}$$

Откуда:

$$\frac{1}{oe} = \frac{k_1d_1}{ok_1.c_1d_1} = \frac{kd}{ok.\ cd}\ .\ .\ .\ (1).$$

Далѣе, изъ прямоугольнаго треугольника oc_1d_1 имѣемъ:

$$c_1d_1 = R_1 \sin\varphi,$$

а изъ прямоугольнаго треугольника ocd:

$$cd = R.\ \sin\varphi.$$

Затѣмъ, принимая во вниманіе прежнія обозначенія, напишемъ:

$$k_1o = \rho_1 + n,$$

$$ko = \rho - n,$$

$$k_1d_1 = k_1o - od_1 = \rho_1 + n - R_1 \cos\varphi$$

и

$$kd = od - ok = R \cos\varphi - \rho + n.$$

Подставивъ найденныя величины въ уравненіе (*1*), получимъ:

$$\frac{\rho_1 + n - R_1 \cos\varphi}{R_1 (\rho_1 + n) \sin\varphi} = \frac{R \cos\varphi - \rho + n}{R (\rho - n) \sin\varphi},$$

или:

$$\frac{\rho_1 + n}{R_1(\rho_1 + n)} - \frac{R_1\cos\varphi}{R_1(\rho_1 + n)} = \frac{R\cos\varphi}{R (\rho - n)} - \frac{\rho - n}{R (\rho - n)},$$

откуда имѣемъ:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} = \cos\varphi \left(\frac{1}{\rho - n} + \frac{1}{\rho_1 + n}\right).$$

Такимъ образомъ, мы пришли къ формулѣ Савари. Это и подтверждаетъ намъ, что точка k, найденная вышеописаннымъ построеніемъ, дѣйствительно есть центръ кривизны кривой AB въ точкѣ m.

Чтобы перейти къ тому случаю, когда кривая A_1B_1 обращается въ точку, мы должны положить въ формулѣ Савари $\rho_1 = o$. Слѣдовательно, для этого, болѣе простого случая, мы получимъ слѣдующее соотношеніе:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \cos\varphi\left(\frac{1}{\rho - n} + \frac{1}{n}\right) \ . \ . \ . (3)$$

Эта формула строится совершенно такъ же, какъ и общая формула Савари, только здѣсь роль центра кривизны k_1 кривой A_1B_1 будетъ играть сама точка m.

11. Окружность перегибовъ. Изъ формулы Савари явствуетъ, что кривизна огибающей зависитъ въ каждый данный моментъ времени не отъ вида катящихся кривыхъ, а отъ кривизны ихъ въ тѣхъ точкахъ, которыми онѣ въ данный моментъ соприкасаются. Отсюда слѣдуетъ, что для нахожденія радіуса кривизны огибающей можно катящіяся кривыя замѣнить другими подъ условіемъ сохраненія величины суммы $\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}$.

Разъ это такъ, то естественно воспользоваться для этой цѣли самыми простыми кривыми, напримѣръ, прямой и окружностью радіуса d, получаемаго изъ формулы:

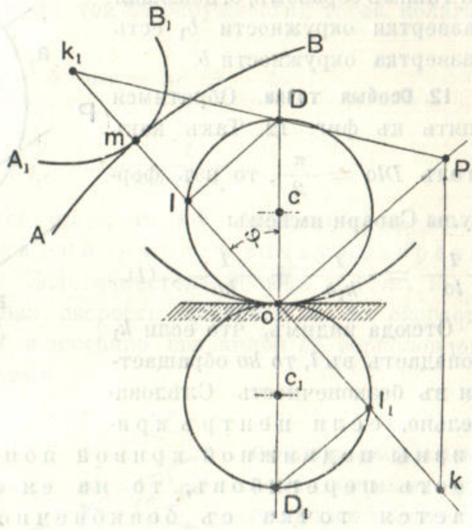
$$\frac{1}{d} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}.$$

Если $oD = d$ (фиг. 12), то центръ кривизны k, на основаніи предыдущего, можетъ быть построенъ слѣдующимъ образомъ. Ведемъ прямую черезъ k_1 и D до пересѣченія въ точкѣ P съ перпендикуляромъ къ om въ точкѣ o, а затѣмъ изъ точки P ведемъ прямую параллельно Do. Точка пересѣченія этой прямой съ продолженіемъ mo и будетъ искомый центръ кривизны. Окружность, построенная на oD, какъ на діаметрѣ, называется о к р у ж н о с т ь ю п е р е г и б о в ъ.

При построеніи точки D надо соблюдать слѣдующія правила, которыя вытекаютъ изъ предположеній, сдѣланныхъ нами при выводѣ формулы Савари.

Если точки c и c_1 (фиг. 11) лежатъ по одну сторону точки o, то мы должны считать R_1 отрицательнымъ; въ противномъ случаѣ ему слѣдуетъ приписать знакъ $+$.

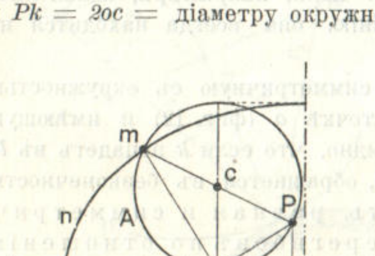
Если въ первомъ случаѣ d будетъ отрицательнымъ, то отрѣзокъ oD надо откладывать отъ o къ c (фиг. 11), въ противномъ случаѣ oD откладывается въ противоположную сторону.



Фиг. 12-я.

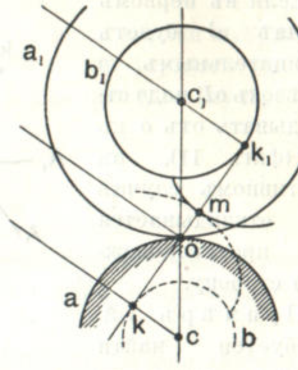
Примѣръ 1-й. Требуется найти центръ кривизны циклоиды въ точкѣ m (фиг. 13).

Легко сообразить, что точка P лежитъ на окружности A и что прямая $Pk \parallel co$; отсюда слѣдуетъ, что $\angle\, omc = \angle\, com = \angle\, Pko$, $mk = 2mo$ и $Pk = 2oc =$ діаметру окружности A. Очевидно, что точка k всегда находится на окружности A_1, симметричной съ A по отношенію точки o. Окружность A_1 катится по прямой $x_1x_1 \parallel xx$, такъ что точка k описываетъ циклоиду n_1. Изъ этого слѣдуетъ, что циклоида n есть развертка циклоиды n_1.



Фиг. 13-я.

Примѣръ 2-й. Требуется найти центръ кривизны огибающей развертки окружности b_1, (фиг. 14) концентрической съ окружностью a_1, которая катится по окружности a. Точка P лежитъ на безконечности, т. к. $\angle\, ok_1c = \dfrac{\pi}{2}$, откуда слѣдуетъ, что $\angle\ okc$ также $= \frac{\pi}{2}$ и прямая ok касается точкою k окружности b, описанной изъ c радіусомъ ck. Такимъ образомъ, огибающая развертки окружности b_1 есть развертка окружности b.



Фиг. 14-я.

12. Особыя точки. Обратимся опять къ фиг. 12. Такъ какъ уголъ $Dlo = \frac{\pi}{2}$, то изъ формулы Савари имѣемъ:

$$\frac{1}{lo} = \frac{1}{k_1 o} + \frac{1}{ko} \ldots (1).$$

Отсюда видимъ, что если k_1 попадаетъ въ l, то ko обращается въ безконечность. Слѣдовательно, если центръ кривизны подвижной кривой попадаетъ на окружность перегибовъ, то на ея огибающей получается точка съ безконечно большимъ радіусомъ кривизны, т. е. точка перегиба.

Въ частныхъ случаяхъ это положеніе приводитъ къ очень простымъ заключеніямъ. Если, напримѣръ, какая либо точка описываетъ прямую линію, она всегда находится на окружности перегибовъ.

Построимъ окружность, симметричную съ окружностью перегибовъ по отношенію къ точкѣ o (фиг. 12) и имѣющую съ нею равный радіусъ. Очевидно, что если k попадетъ въ l_1, то $k_1 o$, на основаніи ур-ія (1), обращается въ безконечность. Слѣдовательно, окружность, равная и симметричная съ окружностью перегибовъ по отношенію къ мгновенному центру вращенія, есть геометрическое мѣсто центровъ кривизны огибающихъ движущихся прямыхъ.

Перепишемъ ур-іе (1) такимъ образомъ:

$$\frac{1}{lo} = \frac{1}{k_1 m + mo} + \frac{1}{km - mo} \ldots (2).$$

Отсюда видно, что если движущаяся прямая проходитъ черезъ точки D_1 и l_1, то km обращается въ ноль, ибо

$$k_1m + mo = \infty \text{ и } mo = l_1o = -lo^{*}),$$

т. е прямая Dl_1 огибаетъ точку l_1.

Допустимъ, наконецъ, что движущаяся точка попала въ точку l_1 (или другую точку той же окружности); тогда, полагая въ ур-іи (2).

$$k_1m = o \text{ и } mo = l_1o = -lo,$$

получимъ:

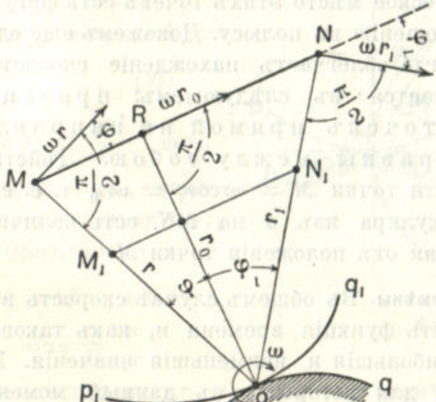
$$-\frac{2}{l_1o} = -\frac{1}{km + l_1o}.$$

Если l_1 совпадаетъ съ o, то km обращается въ ноль, т. е. полюсъ всегда описываетъ точку возврата.

13. Скорость точки. Если извѣстенъ полюсъ o (фиг. 15) и дана мгновенная угловая скорость вращенія ω, то скорость какой нибудь точки M, неизмѣнно связанной съ серполоидой, выразится произведеніемъ

$$\omega.oM = \omega.r$$

и будетъ направлена подъ прямымъ угломъ къ oM. Это есть простое слѣдствіе изъ принятаго нами геометрическаго представленія движенія. Допустимъ, что мы имѣемъ подвижную прямую MN; найдемъ скорости концовъ ея M и N и отложимъ эти скорости по соотвѣтствующимъ мгновеннымъ радіусамъ по направленію къ полюсу, т. ч. $MM_1 = \omega.r$



Фиг. 15-я.

*) При выводѣ формулы Савари мы считали нормаль om положительной и направляли ее отъ полюса въ сторону центра кривизны серполоиды; здѣсь нормаль направлена въ обратную сторону и потому мы приписываемъ ей знакъ —.

и $NN_1 = \omega.r_1$. Не трудно видѣть, что прямая M_1N_1 будетъ параллельна прямой MN, ибо $\triangle\triangle$ MNo и M_1N_1o подобны между собою. Такимъ образомъ, зная скорость одной точки прямой, положимъ, точки M, мы можемъ найти скорость всякой другой ея точки; для этого отложимъ скорость точки M къ полюсу и изъ конца ея M_1 проведемъ прямую, параллельную данной. Отрѣзки мгновенныхъ радіусовъ вращенія между прямыми MN и M_1N_1 и будутъ по величинѣ равняться скоростямъ соотвѣтственныхъ точекъ: такъ—RR_1 есть скорость точки R, NN_1—скорость точки N и т. д.

Это положеніе можетъ быть обобщено. Ели мы будемъ имѣть какую-нибудь подвижную неизмѣняемую фигуру, то можемъ разсматривать ее состоящей изъ цѣлаго ряда элементовъ прямой линіи, для каждаго изъ которыхъ будетъ справедливо указанное заключеніе. Построивъ, такимъ образомъ, скорости для всѣхъ точекъ фигуры и отложивъ ихъ по соотвѣтствующимъ мгновеннымъ радіусамъ къ полюсу, мы легко найдемъ, что геометрическое мѣсто этихъ точекъ есть фигура, подобная данной по отношенію къ полюсу. Докажемъ еще одно положеніе, которое иногда облегчаетъ нахожденіе скоростей. Положеніе это заключается въ слѣдующемъ: проекціи скоростей всѣхъ точекъ прямой на направленіе этой прямой равны между собою. Дѣйствительно, проекція скорости точки $M = \omega r cos\varphi = \omega r_0$, т. е. скорости конца перпендикуляра изъ o на MN, есть величина постоянная, не зависящая отъ положенія точки M.

14. Окружность перемѣны. Въ общемъ случаѣ скорость всякой подвижной точки есть функція времени и, какъ таковая, можетъ имѣть свои наибольшія и наименьшія значенія. Покажемъ, что всѣ точки, для которыхъ въ данный моментъ $\frac{dv}{dt} = o$, располагаются по окружности, имѣющей центръ на общей касательной къ полоидѣ и серполоидѣ. Эта окружность называется окружностью перемѣны и играетъ большую роль при нахожденіи ускореній точекъ. Понятно, что на этой окружности всегда находятся точки, скорость которыхъ со временемъ не измѣняется.

Возьмемъ начало координатъ въ полюсѣ (фиг. 16), ось X направимъ по общей касательной къ pq и p_1q_1, а ось Y—по обшей ихъ нормали и найдемъ геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ $\frac{dv}{dt} = o$.

Имѣемъ:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \omega \frac{dr}{dt} + r \frac{d\omega}{dt} = o \; . \; . \; (1).$$

Если въ слѣдующій моментъ кривыя pq и p_1q_1 прикоснутся точками a и a_1, то очевидно, что

$$dr = - oa_2$$

гдѣ a_2—точка пересѣченія om съ дугой окружности $\smile{a_1a_2}$, проведенной изъ центра m радіусомъ ma_1. Обозначая $\smile{oa_1} = \smile{oa}$ черезъ ds и $\angle\, moY$ черезъ φ, найдемъ:

$$dr = - ds \sin\varphi,$$

такъ что изъ ур-ія (1) имѣемъ:

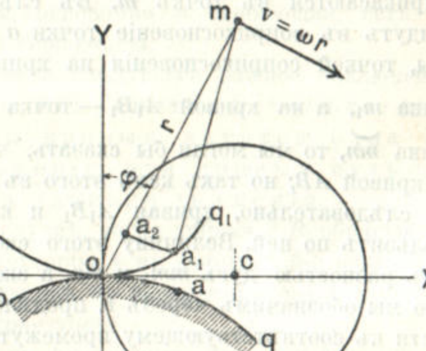
$$- \omega \frac{ds}{dt} \sin\varphi + rk = o \; . \; . \; (2)$$

гдѣ $k = \frac{d\omega}{dt}$ есть не что иное, какъ угловое ускореніе.

Замѣтивъ, что

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ и}$$

$$\sin\varphi = \frac{x}{r},$$



Фиг. 16-я.

можемъ переписать ур-іе (2) въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{r}\left\{ - \omega \frac{ds}{dt} x + (x^2 + y^2)k \right\} = o,$$

откуда видно, что $\frac{dv}{dt} = o$ для точекъ, расположенныхъ по окружности

$$x^2 + y^2 - \frac{\omega \frac{ds}{dt}}{k} x = o \; . \; . \; (3).$$

Если k величина положительная, то центръ окружности располагается по оси oX въ сторону движенія; въ противномъ случаѣ онъ находится по другую сторону полюса.

Радіусъ окружности равняется $\dfrac{\omega\dfrac{ds}{dt}}{2k} = \dfrac{\omega u}{2k}$, гдѣ $u = \dfrac{ds}{dt}$, есть не что иное, какъ скорость перемѣщенія полюса по полоидѣ, которую называютъ обыкновенно **скоростью каченія**.

15. Скорость скольженія. Обратимся къ извѣстной уже намъ фиг. 10. Мы знаемъ, что кривыя AB и A_1B_1 во всякій моментъ имѣютъ одну общую точку соприкосновенія. Въ разсматриваемый моментъ, когда полюсомъ служитъ точка o, эти кривыя соприкасаются въ точкѣ m. Въ слѣдующій моментъ, когда придутъ въ соприкосновеніе точки a и b полоиды и серполоиды, точкой соприкосновенія на кривой AB будетъ служить точка m_1, а на кривой A_1B_1 — точка n. Если бы $\overparen{mm_1}$ была равна $\overparen{mn}$, то мы могли бы сказать, что кривая A_1B_1 катится по кривой AB; но такъ какъ этого въ дѣйствительности нѣтъ, то, слѣдовательно, кривая A_1B_1 и катится по кривой AB, и скользитъ по ней. Величину этого скольженія можно опредѣлить разностью дугъ mm_1 и mn, а скорость скольженія, которую мы обозначимъ черезъ v, предѣломъ отношенія этой разности къ соотвѣтствующему промежутку времени, т. е.

$$v = lim. \frac{\overparen{mm_1} - \overparen{mn}}{\triangle t} \quad . \; . \; . \; . \; (1).$$

Изъ той же фиг. 10-ой мы видимъ, что

$$\overparen{mm_1} = \rho\widehat{k} = \rho\frac{ds.\ cos\varphi}{\rho - n}$$

и

$$\overparen{mn} = s_1\widehat{k_1} = \rho_1\frac{ds.\ cos\varphi}{\rho_1 + n}$$

Такъ что

$$v = \frac{ds.\ cos\varphi}{dt}\left(\frac{\rho}{\rho - n} - \frac{\rho_1}{\rho_1 + n}\right)$$

или

$$v = \frac{ds.\ cos\varphi.\ n.\ (\rho + \rho_1)}{dt\ (\rho - n)\ (\rho_1 + n)} \quad . \; . \; . \; . \; (2).$$

Но изъ формулы Савари мы имѣемъ:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{\cos\varphi\ (\rho + \rho_1)}{(\rho - n)\ (\rho_1 + n)} \ldots (3);$$

подставляя это выраженіе въ ур-іе (2), получимъ:

$$v = \frac{ds}{dt} \cdot n\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) \ldots (4)$$

или

$$v = un\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) \ldots (5).$$

Изъ этой формулы мы видимъ, что скорость скольженія равна нулю только въ томъ случаѣ, если $n = o$, т. е. когда разсматриваемыя кривыя, огибаемая и огибающая, есть не что иное, какъ полоида и серполоида.

Отсюда можно вывести слѣдующее важное заключеніе: въ данной движущейся системѣ только двѣ взаимно огибающія кривыя катятся одна по другой безъ скольженія; эти кривыя суть полоида и серполоида даннаго движенія.

Въ томъ частномъ случаѣ, когда кривая A_1B_1 обращается въ точку и AB въ ея траекторію, v въ формулѣ 5-й означаетъ скорость точки, съ которою она въ разсматриваемый моментъ перемѣщается по своей траекторіи.

Но, съ другой стороны, мы знаемъ, что если мгновенная угловая скорость вращенія около полюса o есть ω, то скорость точки m въ данный моментъ $= \omega.\ n$.

Сравнивая это второе выраженіе для скорости съ тѣмъ, которое даетъ формула 5-я, мы имѣемъ:

$$\omega n = un\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) \ldots (6)$$

или

$$\omega = u\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) \ldots (7)$$

Эта простая формула и устанавливаетъ зависимость между мгновенной угловой скоростью вращенія около полюса o и соотвѣтственной скоростью каченія серполоиды по полоидѣ.

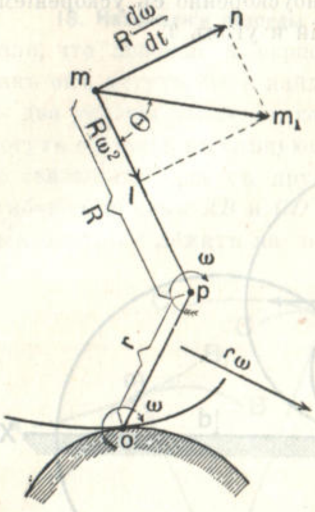
16. Центръ ускореній. Покажемъ, что по отношенію ускоренія имѣетъ мѣсто все то же, что и по отношенію скорости. Мы знаемъ, что всегда существуетъ такая точка подвижной системы, которая въ данный моментъ остается въ покоѣ, не имѣетъ скорости; точка эта есть не что иное, какъ полюсъ или мгновенный центръ вращенія. Аналогично съ этимъ, всегда существуетъ такая точка подвижной системы, которая не имѣетъ ускоренія; эту точку называютъ центромъ ускореній.

Для опредѣленія мѣста этой точки воспользуемся сдѣланными раньше выводами.

Извѣстно, что полное ускореніе точки слагается изъ двухъ векторовъ: a) ускоренія нормальнаго $= \frac{v^2}{\rho}$, направленнаго къ центру кривизны, т. е. имѣющаго, слѣдовательно, направленіе мгновеннаго радіуса, и b) ускоренія тангенціальнаго $= \frac{dv}{dt}$, направленнаго по касательной къ траекторіи точки.

Мы доказали выше, что всѣ точки, расположенныя въ данный моментъ на окружности перегибовъ, кромѣ полюса, описываютъ прямолинейный элементъ ($\rho = \infty$); очевидно, что нормальное ускореніе всѣхъ этихъ точекъ $= o$. Таким образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: полное ускореніе всѣхъ точекъ, лежащихъ въ данный моментъ на окружности перегибовъ $= \frac{dv}{dt}$ и направлено перпендикулярно къ соотвѣтствующимъ мгновеннымъ радіусамъ вращенія. Съ другой стороны, мы видѣли, что для всѣхъ точекъ, лежащихъ въ данный моментъ на окружности перемѣны $\frac{dv}{dt} = o$, т. ч. полное ускореніе всѣхъ этихъ точекъ $= \frac{v^2}{\rho}$ и направлено по мгновенному радіусу вращенія. Послѣ этого становится очевиднымъ, что центръ ускореній есть точка пересѣченія окружности перегибовъ съ окружностью перемѣны.

17. Ускореніе точки. Пусть p (фиг. 17) есть центръ ускореній, o - полюсъ и m—нѣкоторая подвижная точка, ускореніе которой мы ищемъ. Замѣняя вращеніе около o вращеніемъ около p съ той же угловой скоростью, мы должны прибавить еще поступательное движеніе со скоростью $op.\omega = r.\omega$ по направленію, перпендикулярному къ op. Такъ какъ это послѣднее движеніе есть движеніе центра ускореній, то его ускореніе равно нулю и ускореніе точки m есть ускореніе вращательнаго движенія около p съ угловой скоростью ω. Составляющая этого ускоренія по $mp = R\omega^2$, гдѣ $R = pm$, и по направленію перепендикулярному къ $op =$



Фиг. 17-я.

$$= \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = Rk. *$$

Отсюда полное ускореніе.

$$mm_1 = R\sqrt{\omega^4 + k^2}\,. \quad . \quad .$$

Мы видимъ, что полное ускореніе пропорціонально разстоянію отъ центра ускореній, подобно тому, какъ скорость пропорціональна разстоянію отъ полюса. Эта аналогія между скоростью и ускореніемъ идетъ и дальше.

Найдемъ уголъ θ, образуемый mm_1 съ mp; имѣемъ:

$$tg\theta = \frac{Rk}{R\omega^2} = \frac{k}{\omega^2}.$$

Слѣдовательно, уголъ θ не зависитъ отъ положенія точки m, или, иначе сказать, есть величина постоянная для всѣхъ точекъ. На основаніи того, что было доказано для скорости, мы можемъ заключить, что откладывая ускоренія точекъ подвижной фигуры по направленію къ центру ускореній и соединяя концы со-

*) Точка p въ теченіе двухъ безконечно-малыхъ элементовъ времени остается центромъ ускореній, по этому за безконечно-малый элементъ времени R не измѣняется.

отвѣтствующихъ векторовъ прямыми линіями, мы получимъ фигуру, подобную данной.

Примѣръ. Окружность катится по прямой (фиг. 18) такъ, что ея центръ движется равноускоренно съ ускореніемъ j; требуется найти центръ ускореній и уголъ θ.

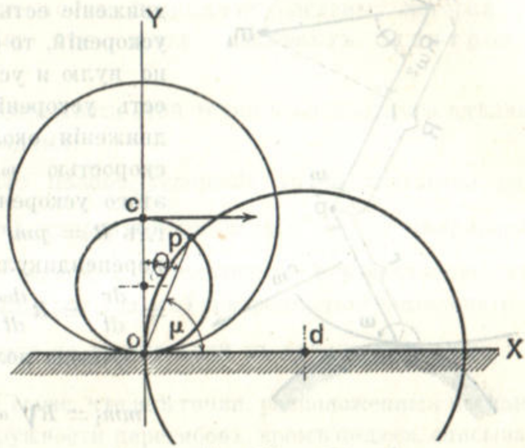
Если начальная скорость центра c есть v_0, то, очевидно, скорость его въ данный моментъ, равная скорости каченія, будетъ:

$$v = u = v_\circ + jt,$$

откуда:

$$\omega = \frac{v_\circ + jt}{r} \text{ и}$$

$$k = \frac{d\omega}{dt} = \frac{j}{r}.$$



фиг. 18-я.

Легко видѣть, что радіусъ окружности перегибовъ $= \frac{r}{2}$

и радіусъ окружности перемѣны $R = \frac{\omega u}{2k} = \frac{(v_\circ + jt)^2}{2j}$,

такъ что ихъ ур-ія соотвѣтственно будутъ:

$$x^2 + y^2 - ry = o \text{ и } x^2 + y^2 - \frac{(v_\circ + jt)^2}{j} = o,$$

откуда

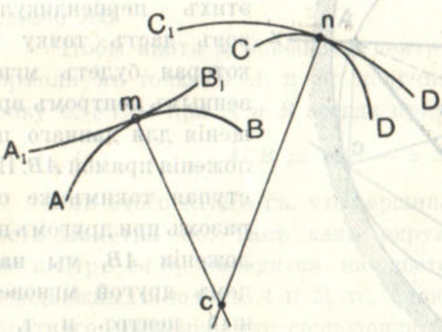
$$tg\mu = \frac{y}{x} = \frac{(v_\circ + jt)^2}{jr}$$

Для $tg\theta$ имѣемъ слѣдующее выраженіе:

$$tg\theta = \frac{k}{\omega^2} = \frac{jr}{(v_\circ + jt)^2}.$$

Въ случаѣ равномѣрнаго движенія, когда $j = 0$, p совпадаетъ съ c и $\theta = 0$ т. е. ускоренія всѣхъ точекъ, связанныхъ съ окружностью, будутъ направлены къ c. Тоже самое мы будемъ имѣть, если равноускоренное движеніе продолжается очень долго ($t = \infty$).

18. Нахожденіе полоиды и серполоиды. До сихъ поръ мы считали, что полоида и серполоида намъ заданы; посмотримъ, какъ онѣ могутъ быть найдены. Для нахожденія ихъ требуются два условія движенія, которыя въ самомъ общемъ случаѣ могутъ состоять въ слѣдующемъ: кривыя A_1B_1 и C_1D_1, неизмѣнно связанныя одна съ другой, при движеніи соотвѣтственно огибаютъ кривыя AB и CD (фиг. 19). Очевидно, что мгновенный центръ c лежитъ на пересѣченіи нормалей въ точкахъ касанія m и n. Давая кривымъ A_1B_1 и C_1D_1 новое положеніе, мы найдемъ новое положеніе полюса. Геометрическое мѣсто полюсовъ и есть полоида. Здѣсь могутъ быть различныя частные случаи, напримѣръ, вмѣсто кривыхъ A_1B_1 и C_1D_1 могутъ быть заданы точки m и n, неизмѣнно связанныя прямой, или даже одна изъ кривыхъ AB и CD можетъ обратиться въ точку.



фиг. 19-я.

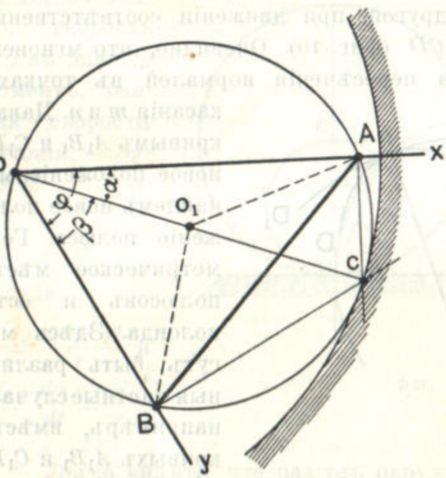
Въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 20, прямая mn концомъ m скользитъ по кривой AB и постоянно проходитъ черезъ точку n. Очевидно, что полюсъ находится на пересѣченіи нормали къ AB въ точкѣ m и перпендикуляра къ mn въ точкѣ n. Замѣтимъ, что какъ бы ни была сложна задача нахожденія полоиды, она всегда можетъ быть легко рѣшена приблизительно графическимъ путемъ.

фиг. 20-я.

Для того, чтобы найти серполоиду, надо только обратить движеніе: считать, что кривыя AB и CD (фиг. 19), неизмѣнно связанныя между собою, движутся такъ, что постоянно соприкасаются соотвѣтственно съ неподвижными кривыми A_1B_1 и C_1D_1.

Очевидно, что полоида этого обращеннаго движенія будетъ серполоидой даннаго.

Примѣръ 1-й. Прямая AB (фиг. 21) движется такъ. что постоянно опирается своими концами на стороны угла XOY. Требуется найти полоиду и серполоиду этого движенія.



фиг 21-я.

Возставимъ перпендикуляры къ прямымъ OX и OY въ точкахъ A и B; пересѣченіе этихъ перпендикуляровъ дастъ точку C, которая будетъ мгновеннымъ центромъ вращенія для даннаго положенія прямой AB. Поступая такимъ же образомъ при другомъ положеніи AB, мы найдемъ другой мгновенный центръ и т. д. Геометрическое мѣсто этихъ точекъ и будетъ полоида даннаго движенія. Найдемъ, какая это будетъ кривая. Соединимъ точку C съ точкой O. Такъ какъ четыреугольникъ $OACB$ имѣетъ два противолежащихъ прямыхъ угла, то произведеніе его діагоналей равно суммѣ произведеній противоположныхъ сторонъ, т. е.

$$OC.\ AB = OA.\ BC + OB.\ AC\ .\ .\ .\ (1).$$

Обозначимъ длину прямой AB черезъ l, уголъ XOY черезъ φ и углы AOC и BOC соотвѣтственно черезъ α и β, такъ что $\varphi = \alpha + \beta$, тогда

$$OA = OC.\ cos\alpha,\ OB = OC.\ cos\beta,\ BC = OC.\ sin\beta,\ AC = \\ = OC.\ sin\alpha.$$

Подставляя эти выраженія въ ур-іе (1), найдемъ:

$$l.OC = (OC)^2\ (cos\alpha\ sin\beta + sin\alpha\ cos\beta) = (OC)^2 sin\varphi.$$

Откуда:

$$OC = \frac{l}{sin\varphi} = const.$$

Отсюда видимъ, что разстояніе мгновеннаго центра вращенія отъ вершины O есть величина постоянная; слѣдовательно, полоида будетъ кругъ, описанный изъ O радіусомъ $= \frac{l}{sin\varphi}$.

Найдемъ теперь серполоиду. Для этого обратимъ движеніе: будемъ разсматривать движеніе сторонъ угла XOY, при томъ условіи, что онѣ всегда проходятъ черезъ концы A и B прямой AB.

Чтобы найти мгновенный центръ вращенія, возставимъ нормали въ точкахъ A и B; получимъ въ пересѣченіи ихъ точку C. Углы при A и B всегда прямые, слѣдовательно:

$$\angle\ ACB = 180^0 - \varphi = const.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что вершина его движется по окружности діаметра OC. Такъ какъ окружность эта неподвижна, ибо центръ ея O_1 находится на постоянномъ разстояніи отъ неподвижныхъ точекъ A и B, то, очевидно, это и есть полоида обратнаго движенія, или серполоида прямого.

Примѣръ 2-й. Прямая $AB = l$ (фиг. 22) при своемъ движеніи опирается концами на двѣ окружности D и D_1 съ центрами O и O_1. При этомъ мы будемъ предполагать, что радіусы этихъ окружностей r и r_1 равны между собою и каждый изъ нихъ больше l и что $OO_1 = l$.

Найдемъ для даннаго положенія прямой AB мгновенный центръ вращенія.

Проведя нормали къ окружностямъ въ точкахъ A и B (т. е. проведя радіусы OA и O_1B), въ пересѣченіи ихъ C получимъ искомый полюсъ. Подобнымъ же образомъ для слѣдующаго положенія AB найдемъ новый полюсъ C_1 и т. д. Геометрическое мѣсто этихъ точекъ (C, C_1 и т. д.) и будетъ полоидой даннаго движенія. Обозначимъ разстояніе OC черезъ ρ и O_1C черезъ ρ_1 и будемъ искать соотношеніе между ихъ величинами. Разсматривая треугольники OAO_1 и O_1BA, мы замѣтимъ, что они равны между собою, ибо у нихъ сторона O_1A общая и по условію задачи $AB = OO_1$ и $AO = O_1B$. А если это такъ, то углы CAO_1 и CO_1A равны между собой и $\triangle ACO_1$ — равнобедренный, т. е.

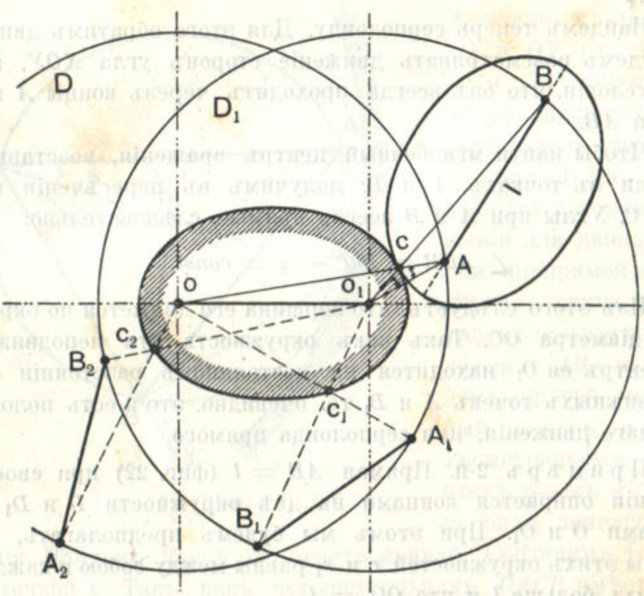
$$O_1C = AC \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

Но

$$O_1C = \rho_1 \quad \text{и} \quad AC = r - \rho,$$

такъ что на основаніи равенства (1) имѣемъ:

$$\rho_1 + \rho = r \ldots \ldots \ldots (2).$$



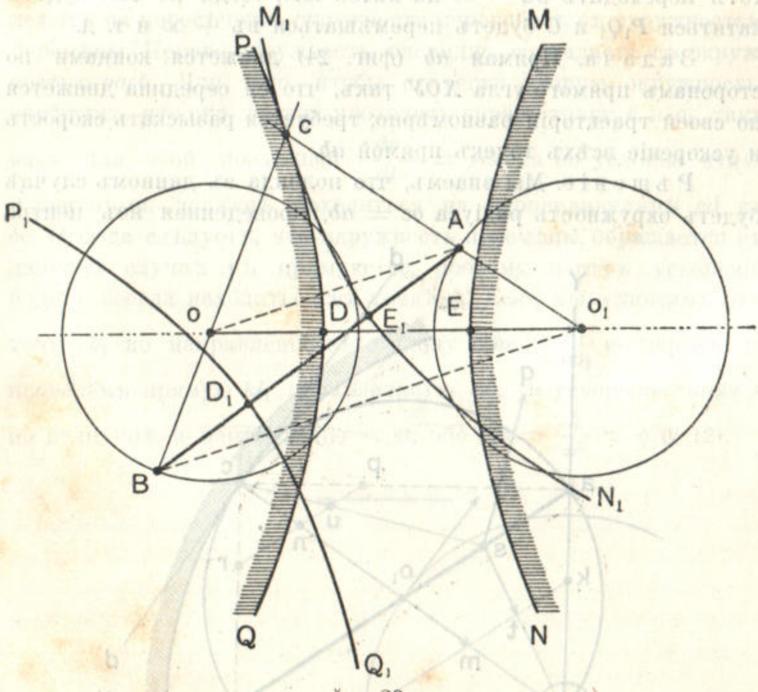
фиг. 22-я.

Слѣдовательно, геометрическое мѣсто точекъ C обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что сумма разстояній каждой его точки отъ двухъ неподвижныхъ точекъ O и O_1 есть величина постоянная; а это значитъ, что разсматриваемое геометрическое мѣсто точекъ есть эллипсъ, имѣющій фокусы въ O и O_1 и большую ось $= r$.

Для опредѣленія серполоиды обратимъ движеніе, т. е. сдѣлаемъ прямую AB неподвижной и будемъ двигать окружности D и D_1, не измѣняя ихъ взаимнаго расположенія, такимъ образомъ, чтобы онѣ постоянно проходили черезъ точки A и B. Въ такомъ случаѣ точки O и O_1 будутъ описывать окружности радіуса r соотвѣтственно около точекъ A и B; такъ что все сведется къ тому, что роли прямыхъ OO_1 и AB перемѣнятся; поэтому, очевидно, что серполоида будетъ тоже эллипсъ и при томъ тождественный съ первымъ, только съ фокусами въ A и B.

П р и м ѣ р ъ 3-й. Условія задачи остаются тѣ же, только въ этомъ случаѣ $AB = l > r$ (фиг. 23).

Мгновенный центръ вращенія долженъ находиться въ точкѣ C, въ точкѣ пересѣченія радіусовъ O_1A и OB. Опредѣлимъ геометрическое мѣсто точекъ C, т. е. полоиду. Обозначимъ разстояніе O_1C черезъ ρ и OC черезъ ρ_1.



фиг. 23-я.

Замѣтивъ, что $\triangle BOO_1 = \triangle O_1AB$, найдемъ, что $\angle OBO_1 = \angle AO_1B$ и, слѣдовательно, что $\triangle O_1CB$ равнобедренный, такъ что

$$O_1C = CB$$

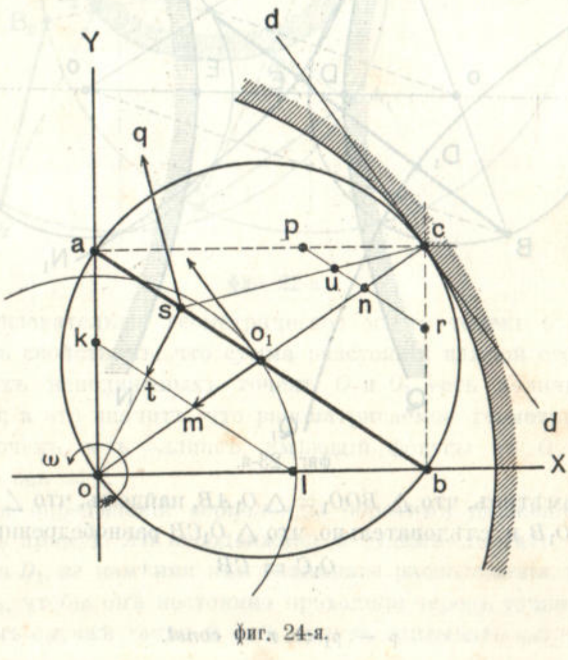
или

$$\rho - \rho_1 = r = const.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что разность разстояній мгновеннаго центра отъ двухъ неподвижныхъ точекъ O и O_1 есть величина постоянная. Отсюда слѣдуетъ, что полоида, или геометрическое мѣсто мгновенныхъ центровъ, есть гипербола съ фокусами въ O и O_1 и съ дѣйствительною осью $DE = r$. Не трудно видѣть, что серполоида есть тождественная гипербола съ фокусами въ A и B и съ дѣйствительною осью $D_1E_1 = r$. Движеніе происходитъ такъ, какъ будто бы гипербола $M_1N_1P_1Q_1$, связанная съ прямой AB, катится по неподвижной гиперболѣ $MNPQ$. Вѣтвь M_1N_1 катится по вѣтви PQ и мгновенный центръ C перемѣщается по PQ въ $+\infty$; изъ $+\infty$ точка C по ассимптотѣ переходитъ въ $-\infty$ на вѣтвь MN; тогда по MN будетъ катиться P_1Q_1 и C будетъ перемѣщаться въ $+\infty$ и т. д.

Задача. Прямая ab (фиг. 24) движется концами по сторонамъ прямого угла XOY такъ, что ея середина движется по своей траекторіи равномѣрно; требуется разыскать скорость и ускореніе всѣхъ точекъ прямой ab.

Рѣшеніе. Мы знаемъ, что полоида въ данномъ случаѣ будетъ окружность радіуса $oc = ab$, проведенная изъ центра



фиг. 24-я.

o, а серполоида—окружность радіуса $o_1c = \frac{ab}{2}$, проведенная изъ центра o_1, изъ середины прямой ab. Мы видѣли (§ 5), что въ этомъ случаѣ точка o_1 будетъ описывать окружность около o радіусомъ $= \frac{ab}{2}$. Если скорость точки o_1 отложимъ къ c и проведемъ черезъ конецъ ея n прямую pr, параллельную ab, то легко найдемъ величину скорости всякой точки. Такимъ образомъ, напримѣръ, скорость точки $s = sq = su$ и направлена подъ прямымъ угломъ къ cs.

Чтобы найти ускоренія точекъ прямой ab, найдемъ положеніе центра ускореній. Центръ ускореній, какъ мы знаемъ, лежитъ на пересѣченіи окружности перегибовъ съ окружностью перемѣны. Первая окружность, очевидно, совпадаетъ съ окружностью $oacb$. Для того, чтобы провести вторую окружность, замѣтимъ, что она должна проходить черезъ точки c и o_1, такъ какъ для этой послѣдней $\frac{dv}{dt}$ = всегда по условію нулю, и центръ ея долженъ находиться на перпендикулярѣ cd къ oc. Отсюда слѣдуетъ, что окружность перемѣны обращается въ данномъ случаѣ въ прямую oc, поэтому центръ ускореній будетъ всегда находиться въ точкѣ o. Если мы отложимъ отъ точки o_1 по направленію къ o длину $o_1m = \frac{v^2}{oo_1}$ и черезъ m проведемъ прямую kl, параллельную ab, то ускореніе точки s по величинѣ и направленію $= st$, ибо $tg\vartheta = \frac{k}{\omega^2} = o$ (§ 12).

ГЛАВА 2-ая

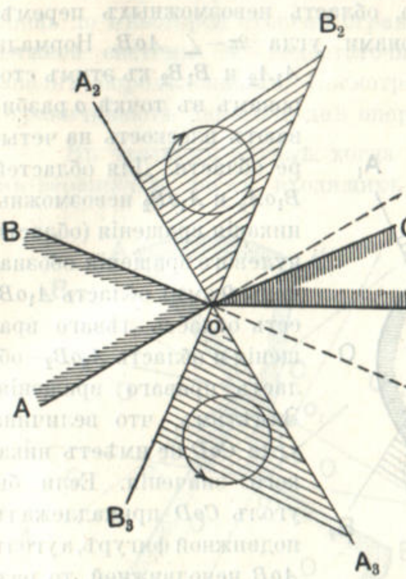
Плоскіе механизмы.

ОТДѢЛЪ 1-ый

Синтезъ механизма.

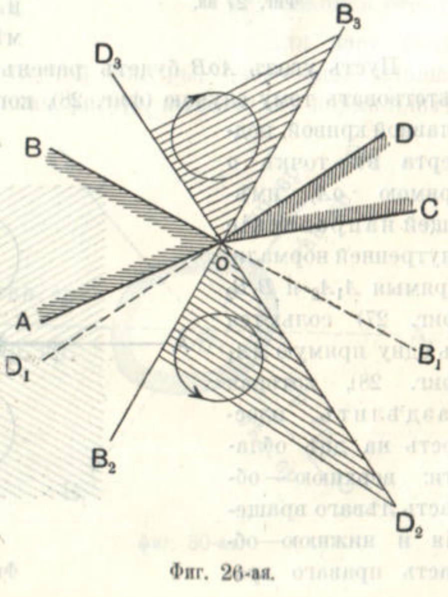
19. Принужденное движеніе. Мы говорили во вступленіи, что машинная система, или механизмъ, обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что каждая ея точка, или даже каждое входящее въ составъ ея твердое тѣло, имѣетъ вполнѣ опредѣленное, принужденное движеніе. Такъ какъ мы разсматриваемъ пока только плоскіе механизмы, то посмотримъ, какимъ образомъ мы должны опереть подвижную фигуру на фигуры неподвижныя, чтобы она имѣла въ каждый данный моментъ вполнѣ опредѣленное движеніе, или, иначе сказать, чтобы для каждаго ея положенія существовалъ вполнѣ опредѣленный мгновенный центръ вращенія. Мы будемъ при рѣшеніи этого вопроса итти методомъ синтетическимъ, т. е. предположимъ сначала, что подвижная фигура подперта въ одной точкѣ, и посмотримъ, въ какой мѣрѣ эта опора ограничиваетъ ея движеніе; затѣмъ введемъ вторую опору, потомъ третью и т. д., пока не получимъ вполнѣ опредѣленный мгновенный центръ вращенія.

Начнемъ со случая, изображеннаго на фиг. 25. Подвижная фигура опирается вершиной выступающего угла AoB на вершину неподвижнаго угла DoC. Посмотримъ, какія движенія угла AoB будутъ возможны. Если мы продолжимъ стороны Ao и Bo, то легко усмотримъ, что никакія перемѣщенія внутри угла A_1oB_1 невозможны. Если поэтому мы проведемъ черезъ точку o нормали A_2A_3 и B_2B_3 соотвѣтственно къ AA_1 и BB_1, то



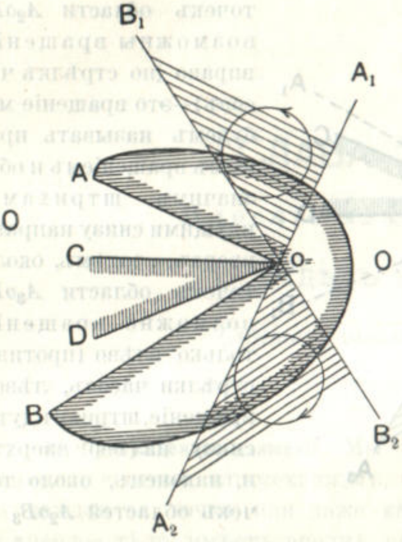
Фиг. 25-ая.

эти нормали раздѣлятъ плоскость на четыре области, причемъ около точекъ области A_2oB_2 возможны вращенія вправо (по стрѣлкѣ часовъ)—это вращеніе мы будемъ называть правымъ вращеніемъ и обозначимъ штрихами, идущими снизу направо вверхъ,—затѣмъ, около точекъ области A_3oB_3 возможно вращеніе только влѣво (противъ стрѣлки часовъ, лѣвое вращеніе, штрихи идутъ снизу налѣво вверхъ) и, наконецъ, около точекъ областей A_2oB_3 и B_2oA_3 возможны вращенія и вправо, и влѣво. Если бы одна изъ прямыхъ oA_1 и oB_1, или обѣ вмѣстѣ прошли внутри угла CoD, то область невозможныхъ перемѣщеній опредѣлилась бы соотвѣтствующей стороной, или обѣими сторонами угла CoD. Такой случай мы имѣемъ на фиг. 26, которая не требуетъ дальнѣйшихъ поясненій.



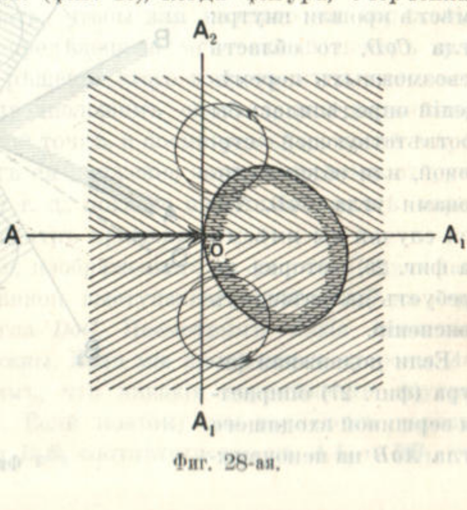
Фиг. 26-ая.

Если подвижная фигура (фиг. 27) опирается вершиной входящего угла AoB на неподвижный уголъ CoD, то, понятно, область невозможныхъ перемѣщеній ограничивается сторонами угла $2\pi - \angle AoB$. Нормали A_1A_2 и B_1B_2 къ этимъ сторонамъ въ точкѣ o разбиваютъ плоскость на четыре области. Для областей B_1oA_2 и A_1oB_2 невозможны никакія вращенія (области нулевого вращенія обозначены 0-емъ), область A_1oB_1 есть область лѣваго вращенія и область A_2oB_2—область праваго вращенія. Замѣтимъ, что величина угла CoD не имѣетъ никакого значенія. Если бы уголъ CoD принадлежалъ подвижной фигурѣ, а уголъ AoB неподвижной, то разница заключалась бы въ томъ, что области праваго и лѣваго вращенія перемѣнились бы мѣстами.



Фиг. 27 ая.

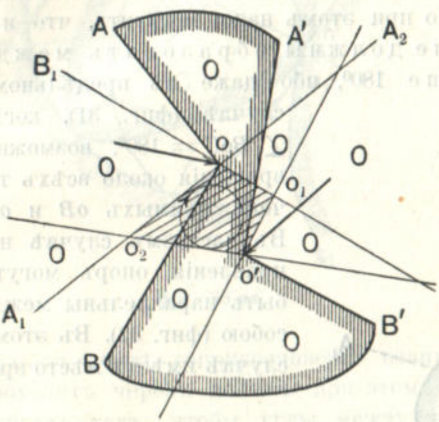
Пусть уголъ AoB будетъ равенъ 180^0, что можетъ соотвѣтствовать тому случаю (фиг. 28), когда фигура, очерченная плавной кривой, подперта въ точкѣ o прямою oA, имѣющей направленіе внутренней нормали. Прямыя A_1A_2 и B_1B_2 (фиг. 27) сольются въ одну прямую AA_1 (фиг. 28), которая раздѣлитъ плоскость на двѣ области: верхнюю — область лѣваго вращенія и нижнюю—область праваго вра-



Фиг. 28-ая.

Изъ предыдущего мы видимъ, что одна опора можетъ лишь до нѣкоторой степени ограничить свободу движенія подвижной системы, но недостаточна, чтобы сдѣлать движеніе вполнѣ опредѣленнымъ. Посмотримъ теперь, въ какой мѣрѣ ограничиваютъ движеніе двѣ опоры.

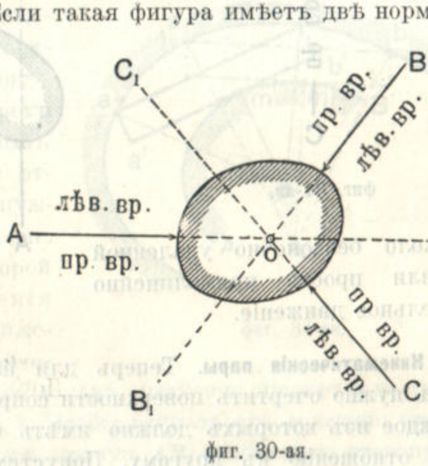
Въ частномъ случаѣ, когда подвижная фигура подперта въ вершинахъ двухъ входящихъ угловъ (фиг. 29), возможно совершенно устранить движеніе или сдѣлать его вполнѣ опредѣленнымъ при помощи искусственнаго подбора мѣстъ для вершинъ o и o' и направленія сторонъ угловъ.



фиг. 29-ая.

Въ нашемъ случаѣ возможно вращеніе по стрѣлкѣ часовъ около всѣхъ точекъ внутри четыреугольника $oo_1o'o_2$.

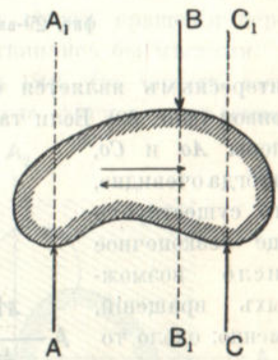
Для насъ болѣе интереснымъ является случай фигуры, очерченной плавной кривой (фиг. 30). Если такая фигура имѣетъ двѣ нормальныхъ опоры Ao и Co, то тогда очевидно, что существуетъ еще безконечное число возможныхъ вращеній, именно: около точекъ внутри угла AoC_1 — противъ стрѣлки часовъ и около точекъ внутри угла CoA_1 —по стрѣлкѣ часовъ; около точки



фиг. 30-ая.

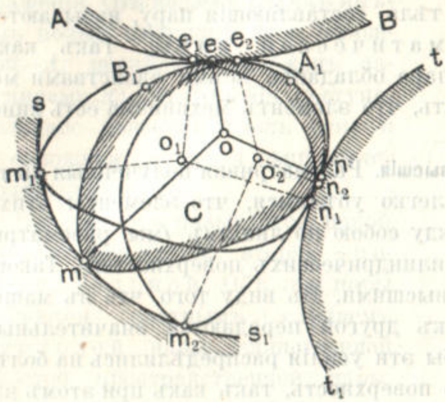
о возможно вращеніе и въ ту и въ другую сторону. Для того, чтобы точка *о* стала единственнымъ возможнымъ центромъ вращенія, нужна еще третяя нормальная опора *Во*, пересѣкающаяся съ двумя первыми въ той же точкѣ *о*. Отсюда получается такой выводъ: если плоская фигура при своемъ движеніи постоянно опирается на три нормальныхъ опоры, направленія которыхъ пересѣкаются въ одной точкѣ, то ея движеніе будетъ вполнѣ опредѣленнымъ. Но при этомъ надо замѣтить, что направленія опоръ не должны образовать между собою угла, больше 180⁰, ибо даже въ предѣльномъ случаѣ (фиг. 31), когда $\angle BoC = 180^0$, возможны вращенія около всѣхъ точекъ прямыхъ *оВ* и *оС*. Въ частномъ случаѣ направленія опоръ могутъ быть параллельны между собою (фиг. 32). Въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто вращеніе около безконечно удаленной точки, или просто прямолинейно поступательное движеніе.

фиг. 31-ая.

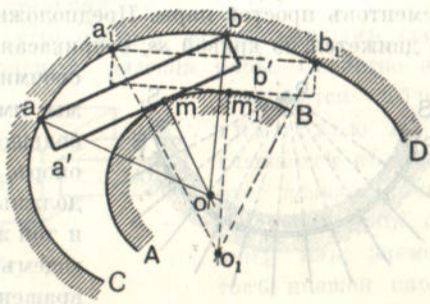


фиг. 32-ая.

20. Кинематическія пары. Теперь для насъ должно быть ясно, какъ нужно очертить поверхности соприкосновенія двухъ тѣлъ, каждое изъ которыхъ должно имѣть опредѣленное движеніе по отношенію къ другому. Допустимъ, что фигура *С* должна при своемъ движеніи постоянно опираться на кривыя ss_1 и tt_1 (фиг. 33). Чтобы сдѣлать это движеніе принужденнымъ, мы должны прибавить еще третью опору такимъ образомъ, чтобы ея направленіе проходило черезъ точку o, гдѣ пересѣкаются нормали въ точкахъ касанія контура фигуры C съ кривыми tt_1 и ss_1. Очевидно, что для этого намъ къ двумъ даннымъ кривымъ надо прибавить еще третью кривую AB, которую будетъ огибать при заданномъ движеніи какая нибудь часть A_1B_1 профиля фигуры C, ибо, какъ мы знаемъ, нормаль въ точкѣ соприкосновенія взаимно огибающихъ всегда проходитъ черезъ полюсъ; при этомъ часть A_1B_1 мы должны выбрать такъ, чтобы углы между нормалями были всегда меньше 180^0. Если мы теперь всѣ три кривыя AB, ss_1 и tt_1 соединимъ въ одно цѣлое, то по отношенію къ этой системѣ фигура C будетъ имѣть принужденное движеніе. Если бы мы сдѣлали неподвижной фигуру C, то система трехъ упомянутыхъ кривыхъ имѣла бы также по отношенію къ C принужденное движеніе. На фиг. 34 мы имѣемъ второй примѣръ полученія принужденнаго движенія. Дано, что прямоугольникъ $aba'b'$ при своемъ движеніи опирается на кривую CD двумя точками a и b. Чтобы сдѣлать его движеніе принужденнымъ, надо прибавить кривую AB, огибающую сторону $a'b'$. Въ



фиг. 33-яя.

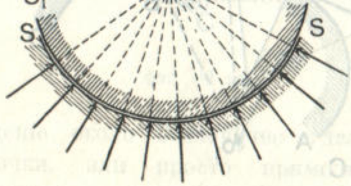


фиг. 34-ая.

такомъ случаѣ какъ $aba'b'$, такъ и CD будутъ имѣть вполнѣ опредѣленныя движенія одно относительно другого.

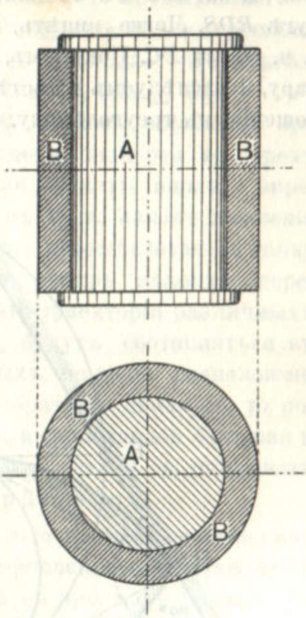
Два тѣла, каждое изъ которыхъ имѣетъ принужденное движеніе относительно другого, составляютъ вмѣстѣ кинематическую пару; тѣла, составляющія пару, называются элементами кинематической пары. Такъ какъ всякая кинематическая пара обладаетъ всѣми свойствами механизма, то можно сказать, что элементъ механизма есть кинематическая пара.

21. Пары простыя и высшія. Разсматривая полученныя выше пары (фиг. 33 и 34), мы легко убѣдимся, что элементы этихъ паръ соприкасаются между собою по линіямъ (мы разсматриваемъ среднія сѣченія цилиндрическихъ поверхностей). Такого рода пары называются высшими. Въ виду того, что въ машинахъ отъ одной части къ другой передаются значительныя усилія, желательно, чтобы эти усилія распредѣлялись на болѣе или менѣе значительную поверхность, такъ какъ при этомъ изнашиваніе поверхностей элементовъ паръ будетъ значительно меньше. Въ этомъ отношеніи высшія пары имѣютъ большой недостатокъ, ибо, какъ мы видѣли, ихъ элементы соприкасаются только по линіямъ, а иногда даже и по точкамъ. На основаніи этого въ машинахъ гораздо чаще примѣняются пары, элементы которыхъ соприкасаются между собою цѣлыми поверхностями. Такія пары называются низшими или простыми. Посмотримъ, какимъ условіямъ должна удовлетворять поверхность элементовъ простой пары. Предположимъ, что кривая s_1s_1 (фиг. 35) движется по кривой ss, соприкасаясь съ послѣдней всѣми своими точками. Очевидно, что мы имѣемъ здѣсь безконечно большое число нормальныхъ опоръ, направленія которыхъ должны пересѣкаться въ одной и той же точкѣ, въ соотвѣтствующемъ мгновенномъ центрѣ вращенія. Отсюда слѣдуетъ, что обѣ кривыя не могутъ быть ничѣмъ инымъ, какъ окружностями, ибо только окружность обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всѣ нормали къ ней пересѣкаются въ одной точкѣ. Въ частномъ случаѣ, когда радіусъ окружности обращается въ безконечность,



фиг. 35 ая.

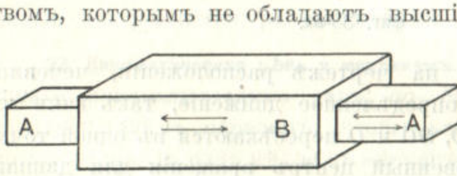
она обращается въ прямую линію. Соотвѣтственно съ этимъ могутъ быть только двѣ простыя пары: 1) сплошное тѣло вращенія (фиг. 36) въ поломъ тѣлѣ вращенія. (Въ нашемъ случаѣ имѣемъ полый цилиндръ B и сплошной—A; послѣдній снабженъ закраинами для устраненія поступательнаго движенія вдоль оси) и 2) сплошная призма A (фиг. 37) въ полой призмѣ B.



фиг. 36-ая.

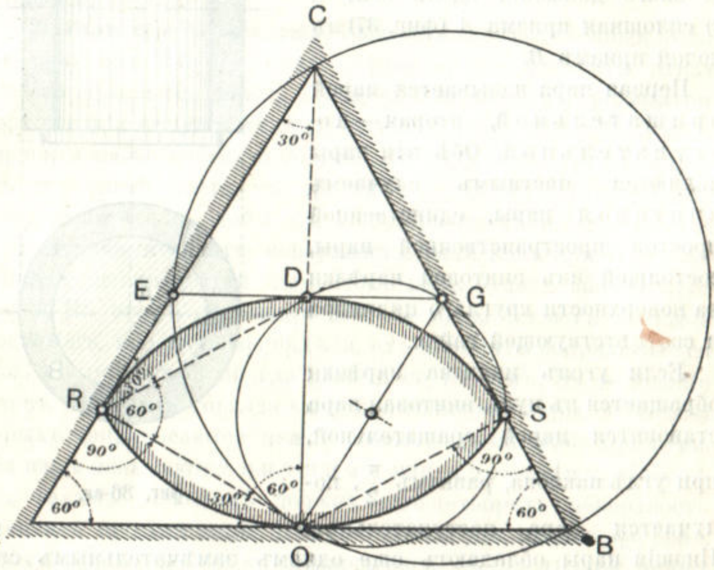
Первая пара называется парой вращательной, вторая — поступательной. Обѣ эти пары являются частнымъ случаемъ винтовой пары, единственной простой пространственной пары, состоящей изъ винтовой нарѣзки на поверхности круглаго цилиндра и соотвѣтствующей гайки.

Если уголъ наклона нарѣзки обращается въ нуль, винтовая пара становится парой вращательной, при углѣ наклона, равномъ $\frac{\pi}{2}$, получается пара поступательная. Низшія пары обладаютъ еще однимъ замѣчательнымъ свойствомъ, которымъ не обладаютъ высшія пары. Свойство это называется обратимостью и заключается въ томъ, что всякая точка, соединенная съ однимъ изъ элементовъ низшей пары, безразлично съ какимъ, будетъ относительно другого описывать одну и ту же траекторію. Чтобы выяснить, откуда проистекаетъ это свойство, разсмотримъ одну высшую пару.



фиг. 37-ая.

22. Примѣръ высшей пары. Составимъ такую пару. Изъ точекъ O и D опишемъ равными радіусами дуги RDS и ROS (фиг. 38) и примемъ чечевицу $RDSOR$ за одинъ изъ элементовъ пары. Второй элементъ построимъ слѣдующимъ образомъ. Проведемъ въ точкѣ *O* касательную *AB* къ дугѣ *ROS*, а затѣмъ въ точкахъ *R* и *S* касательныя *AC* и *BC* къ дугѣ *RDS*. Легко видѣть, что $\triangle$ *ABC* будетъ равносторонній, т. ч. *OD* = *DC*. Покажемъ, что двѣ эти фигуры составляютъ пару, и изслѣдуемъ вмѣстѣ съ тѣмъ движеніе чечевицы по отношенію къ треугольнику.



фиг. 38-ая.

При указанномъ на чертежѣ расположеніи, чечевица должна имѣть вполнѣ опредѣленное движеніе, такъ какъ три нормальныхъ опоры *RO*, *SO* и *O* пересѣкаются въ одной точкѣ *O*, которая и есть мгновенный центръ вращенія для даннаго положенія чечевицы. Будемъ теперь перемѣщать чечевицу такъ, чтобы дуга *RD* скользила по прямой *CA* отъ *C* къ *A*, а дуга *ROS*—по *AB* отъ *A* къ *B*. Покажемъ, что точка *S* будетъ при этомъ скользить по *BC*. Дѣйствительно, если дуга *RD* скользитъ по *CA*, то ея центръ *O* долженъ двигаться по *OG*, по прямой, параллельной *CA*. Такимъ же образомъ мы убѣдимся, что точка *D* будетъ двигаться по *GE*, если *GE* есть касательная въ точкѣ *D* къ дугѣ *RDS*. Отсюда мы видимъ, что движенiе происходитъ такъ, какъ будто бы прямая OD своими концами скользитъ по сторонамъ угла EGO. Мы знаемъ, что полоида такого движенiя будетъ окружность, проведенная изъ G радiусомъ GO, а серполоида тоже окружность, построенная на OG, какъ на дiаметрѣ. Такъ какъ очевидно, что послѣдняя окружность проходитъ черезъ точку S, ибо $\angle GSO = 90°$, то точка S будетъ двигаться по BC. Такимъ образомъ, при всякомъ положенiи чечевицы она будетъ подперта въ трехъ точкахъ и ея движенiе, слѣдовательно, будетъ вполнѣ опредѣленнымъ. Когда точка O придетъ въ G, то законъ движенiя не измѣнится, а лишь центръ полоиды перемѣстится въ точку E; когда же она совпадетъ съ E, то центръ полоиды перемѣстится въ O. Отсюда мы видимъ, что траекторiи различныхъ точекъ, соединенныхъ съ чечевицей, будутъ составляться въ общемъ случаѣ изъ трехъ одинаковыхъ, но разно расположенныхъ дугъ эллипсовъ. Если бы мы обратили движенiе, то полоидой стала бы меньшая окружность, а серполоидой большая и точки, соединенныя съ треугольникомъ, стали бы описывать дуги кривой, называемой п е р и - к а р д i о и д о й.

Мы можемъ заключить отсюда, что данная высшая пара необратима оттого, что полоида и серполоида представляютъ собою различныя кривыя, тогда какъ въ простыхъ парахъ обѣ эти кривыя обращаются въ точки. Если бы даже случайно полоида и серполоида были бы совершенно тождественны, то всетаки онѣ иначе располагались бы на плоскости, поэтому и соединенныя съ ними точки описывали бы хотя и одинаковыя кривыя, но различно расположенныя на плоскости.

23. Кинематическая цѣпь и механизмъ. Пусть мы имѣемъ нѣсколько кинематическихъ паръ: aa_1, bb_1, cc_1 и т. д. Свяжемъ эти пары такимъ образомъ, чтобы каждый элементъ одной пары образовалъ одно цѣлое съ элементомъ другой. Это можно сдѣлать различными способами, напримѣръ:

$$a, a_1 - b, b_1 - c, c_1 - d, d_1$$

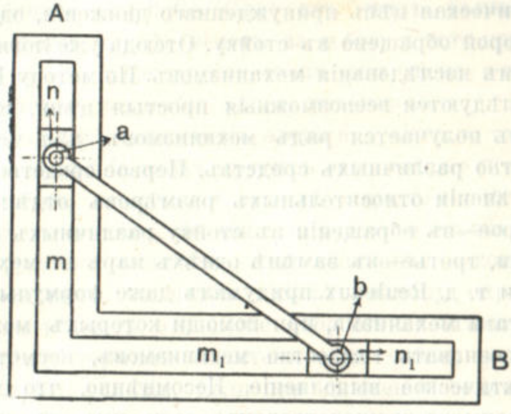
$$a, a_1 - b_1, b - c, c_1 - d_1, d \text{ и т. д.}$$

Совокупность связанныхъ между собою такимъ образомъ кинематическихъ паръ называется к и н е м а т и ч е с к о ю ц ѣ п ь ю; тѣла же, соединяющiя въ себѣ два элемента сосѣднихъ паръ, называются звеньями кинематической цѣпи.

Если мы соединимъ послѣдній элементъ съ первымъ (въ нашемъ случаѣ d_1 съ a или d съ a), то получимъ замкнутую цѣпь; въ противномъ случаѣ она называется открытой. Если, наконецъ, замкнутая цѣпь составлена такъ, что каждое звено ея можетъ имѣть только одно опредѣленное движеніе относительно другихъ, то такая цѣпь называется цѣпью принужденнаго движенія. Пока такая цѣпь во всей своей совокупности можетъ перемѣщаться въ плоскости, то она остается цѣпью. Если же мы одно изъ ея звеньевъ сдѣлаемъ неподвижнымъ, то другія ея звенья будутъ уже совершать вполнѣ опредѣленныя движенія на плоскости и она становится механизмомъ. Такимъ образомъ, механизмъ есть замкнутая кинематическая цѣпь принужденнаго движенія, одно звено которой сдѣлано неподвижнымъ. Очевидно, что дѣлая неподвижными по очереди различныя звенья одной и той-же цѣпи, мы получимъ изъ одной цѣпи столько различныхъ механизмовъ, сколько въ ней заключается звеньевъ. Все здѣсь сказанное относится одинаковымъ образомъ и къ пространственнымъ механизмамъ.

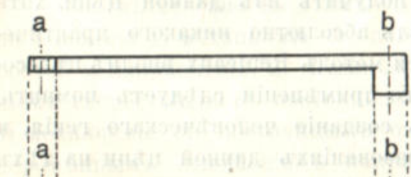
24. Нѣкоторыя дополненія къ предыдущему. Замѣтимъ, что иногда два тѣла становятся кинематической парой благодаря какой-нибудь внѣшней силѣ. Примѣромъ такой пары могутъ служить вагонное колесо и рельсъ, валъ въ открытомъ подшипникѣ и т. п. Такія пары называются парами съ силовымъ замыканіемъ. Далѣе слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что въ составъ кинематической цѣпи могутъ входить и такія пары, которыя сами по себѣ, независимо отъ соединенія съ другими парами, не даютъ опредѣленнаго движенія. Для поясненія разсмотримъ слѣдующій простой примѣръ. Положимъ, что мы имѣемъ такую цѣпь: двѣ полосы A и B (фиг. 39) образуютъ между собою прямой уголъ и снабжены прямоугольными прорѣзами m и m_1. Въ эти прорѣзы помѣщены ползушки n и n_1 съ цапфами a и b, на которыя надѣтъ ушками стержень ab. Не трудно видѣть, что такого рода приборъ можетъ служить для вычерчиванія дугъ эллипса.

Сдѣлаемъ теперь такую замѣну. Устранимъ одну изъ ползушекъ, положимъ n_1, и придадимъ стержню ab такую форму, какъ показано на (фиг. 40), т. е. сохранимъ ушко a, а вмѣсто ушка b присоединимъ къ нему цапфу b съ осью, перпендикулярной къ его оси, съ діаметромъ, равнымъ ширинѣ прорѣза. Такая цапфа и прямоугольный прорѣзъ сами по себѣ не образуютъ пары; но если мы вставимъ цапфу въ прорѣзъ и надѣнемъ въ то же время ушко a на цапфу ползушки n, то цапфа b получитъ вполнѣ опредѣленное движеніе по отношенію къ прорѣзу m_1.



фиг. 39-ая.

Мы видимъ, что при такой замѣнѣ механизмъ даже упрощается. Раньше онъ состоялъ изъ четырехъ паръ: 1) поступательной, состоящей изъ прорѣза m и ползушки n; 2) вращательной,—изъ цапфы a и ушка a; 3) вращательной,—изъ цапфы b и ушка b, и 4) поступательной, — изъ прорѣза m_1 и ползушки n_1. Послѣ замѣны мы имѣемъ только три пары: 3-яя и 4-ая пары замѣнены одной, состоящей изъ прорѣза m_1 и цапфы b на концѣ стержня ab. Совершенно такимъ же образомъ мы могли бы замѣнить одной парой двѣ первыя пары и получили бы механизмъ, состоящій изъ двухъ паръ, каждая изъ которыхъ сама по себѣ, безъ соединенія съ другой, не была бы парой.



фиг. 40-ая.

25. Методъ Reuleaux. Весь синтезъ механизма, который мы изложили выше, принадлежитъ Reuleaux и изложенъ имъ въ цитированномъ выше его трудѣ. Въ концѣ концовъ Reuleaux приходитъ къ заключенію, что механизмъ есть замкнутая кинематическая цѣпь принужденнаго движенія, одно изъ звеньевъ которой обращено въ стойку. Отсюда уже логически вытекаетъ планъ изслѣдованія механизмовъ. По методу Reuleaux сначала изслѣдуются всевозможныя простыя цѣпи, изъ которыхъ затѣмъ получается рядъ механизмовъ, для чего имѣется множество различныхъ средствъ. Первое средство заключается въ измѣненіи относительныхъ размѣровъ отдѣльныхъ звеньевъ, второе—въ обращеніи въ стойку различныхъ звеньевъ той же цѣпи, третье—въ замѣнѣ однѣхъ паръ въ механизмахъ другими и т. д. Reuleaux придумалъ даже формулы для обозначенія состава механизма, при помощи которыхъ можно, напримѣръ, распознавать тождество механизмовъ, несмотря на различное практическое выполненіе. Несомнѣнно, что методъ Reuleaux остроуменъ и плодотворенъ; если имъ въ настоящее время мало пользуются, то это происходитъ оттого, что Reuleaux зашелъ въ своихъ изслѣдованіяхъ слишкомъ далеко, не говоря уже о тѣхъ противорѣчіяхъ, въ которыя онъ впалъ. Самая главная его ошибка заключается въ томъ, что онъ считаетъ машинную систему чѣмъ-то вродѣ явленія природы и потому не находитъ возможнымъ оставить безъ вниманія ни одного механизма, который можно получить изъ данной цѣпи, хотя бы этотъ механизмъ не имѣлъ абсолютно никакого практическаго значенія. Намъ кажется методъ Reuleaux вполнѣ цѣлесообразнымъ, но только при его примѣненіи слѣдуетъ помнить, что машинная система есть созданіе человѣческаго генія, и останавливаться при преобразованіяхъ данной цѣпи на тѣхъ механизмахъ, которые могутъ имѣть практическое примѣненіе.

26. Классификація Willis'а. Въ настоящее время очень часто при изученіи механизмовъ пользуются классификаціей Willis'а*). Классификація эта основана на весьма серьезныхъ соображеніяхъ о томъ, что и какъ нужно изучать въ механизмахъ. Траекторіи точекъ отдѣльныхъ частей механизма опредѣляются самымъ его устройствомъ, но направленія, въ которыхъ точки пробѣгаютъ свои траекторіи, и законы измѣненія скоро-

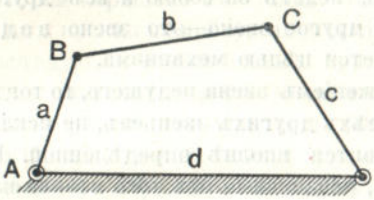
*) Principles of mechanism.

стей ихъ являются совершенно неопредѣленными, пока мы не задали себѣ направленіе движенія и законъ измѣненія движенія какой либо точки, или какого либо звена механизма. Во всякомъ механизмѣ существуютъ два звена, которыя обращаютъ на себя особенное вниманіе. Одно изъ этихъ звеньевъ, получая свое движеніе извнѣ, ведетъ за собою и всѣ другія звенья; это звено ведущее; другое звено—это звено ведомое, движеніе котораго является цѣлью механизма.

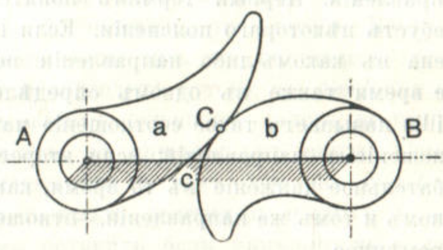
Если мы зададимся движеніемъ звена ведущего, то тогда, понятно, задача о движеніи всѣхъ другихъ звеньевъ, не исключая и звена ведомаго, становится вполнѣ опредѣленной. Но если мы изучаемъ механизмъ, независимо отъ того станка или машины, въ которую онъ включенъ, и не задаваясь закономъ движенія звена ведущего, то, чтобы сдѣлать задачу опредѣленной, мы должны изучать отношеніе скоростей и отношеніе направленій. Первый терминъ понятенъ самъ собою, второй требуетъ нѣкотораго поясненія. Если при движеніи ведущего звена въ какомъ-либо направленіи ведомое звено движется все время также въ одномъ опредѣленномъ направленіи, то Willis называетъ такое соотношеніе направленій постояннымъ отношеніемъ направленій; если второе звено совершаетъ колебательное движеніе въ то время, какъ первое движется въ одномъ и томъ же направленіи,—отношеніе направленій будетъ перемѣнное.

Соотвѣтственно съ этимъ Willis дѣлитъ всѣ механизмы на 4 класса: 1) механизмы съ постояннымъ отношеніемъ скоростей и направленій, 2) механизмы съ перемѣннымъ отношеніемъ скоростей, но съ постояннымъ отношеніемъ направленій, 3) механизмы съ постояннымъ отношеніемъ скоростей, но съ перемѣннымъ отношеніемъ направленій и 4) механизмы съ перемѣннымъ отношеніемъ скоростей и направленій. Кромѣ того Willis разбиваетъ всѣ механизмы на три группы. Къ первой группѣ относятся механизмы, въ которыхъ движеніе отъ звена ведущего къ ведомому передается непосредственнымъ соприкосновеніемъ, ко второй—гдѣ движеніе передается при помощи твердыхъ тѣлъ, и къ третьей—гдѣ движеніе передается при помощи гибкихъ или жидкихъ тѣлъ. Эти группы до нѣкоторой степени напоминаютъ цѣпи Reuleaux.

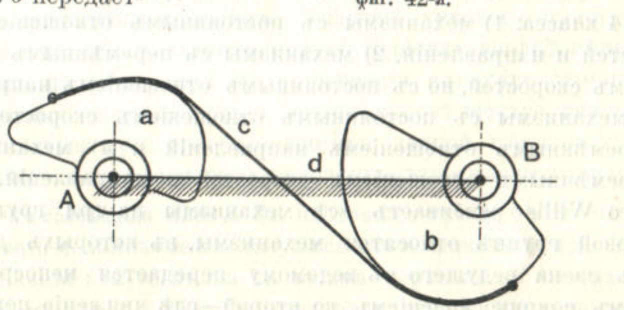
27. Планъ дальнѣйшего изложенія. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ при изслѣдованіи механизмовъ слѣдовать методу Reuleaux, удерживаясь при преобразованіи цѣпей въ предѣлахъ, указываемыхъ практическимъ значеніемъ получаемыхъ механизмовъ, и разсмотримъ только три цѣпи, которыя будутъ какъ разъ соотвѣтствовать группамъ Willis'а. Цѣпи эти изображены на фигурахъ 41, 42 и 43. Первая цѣпь заключаетъ въ себѣ четыре вращательныя пары *A*, *B*, *C* и *D* и четыре звена *a*, *b*, *c* и *d*. Цѣпь эта называется плоскимъ шарнирнымъ четыреугольникомъ и является самымъ простымъ случаемъ шарнирнаго механизма; движеніе здѣсь передается отъ *a* къ *c*, или обратно, при помощи твердаго тѣла *b*. Вторая цѣпь заключаетъ двѣ вращательныя пары *A* и *B* и одну высшую пару *C* и три звена *a*, *b* и *c*. Движеніе отъ *a* къ *b* передается непосредственнымъ соприкосновеніемъ. Изъ этой цѣпи выводятся зубчатыя колеса. Третья цѣпь состоитъ также изъ



фиг. 41-я.



фиг. 42-я.



фиг. 43-я.

двухъ вращательныхъ паръ *A* и *B* и двухъ паръ особаго рода, которыя образуются гибкимъ тѣломъ *c* съ двумя твердыми тѣлами *a* и *b*. Здѣсь движеніе передается, слѣдовательно, при помощи гибкаго тѣла, которое, навиваясь на одно изъ твердыхъ тѣлъ, свивается съ другого.

Кромѣ этого мы удѣлимъ нѣкоторое вниманіе и болѣе сложнымъ механизмамъ.

ОТДѢЛЪ 2-ой.

Плоскій шарнирный четыреугольн. и его преобразованія.

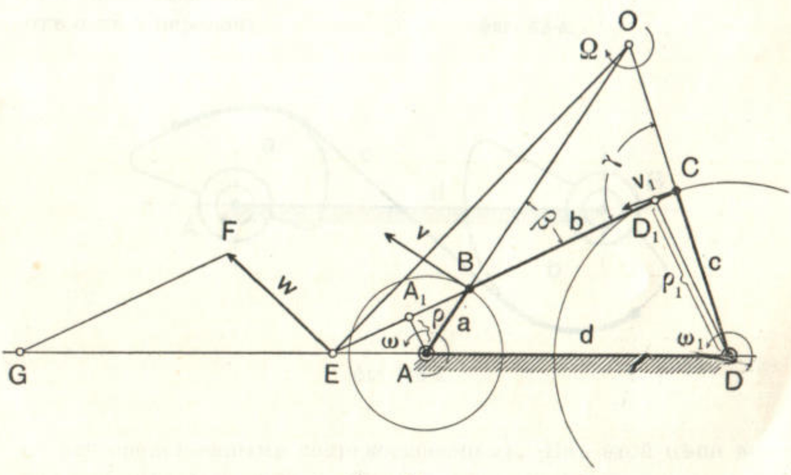
28. Законъ Willis'а. Допустимъ, что звено d (фиг. 44) сдѣлано стойкой, звено a вращается съ угловой скоростью ω и звено c со скоростью ω_1. Чтобы найти отношеніе между этими скоростями, разсмотримъ движеніе звена b. Очевидно, что соотвѣтствующій данному расположенію механизма мгновенный центръ вращенія звена b находится на пересѣченіи продолженій a и c въ точкѣ O. Если мы обозначимъ его мгновенную угловую скорость черезъ Ω, то легко найдемъ скорости точекъ B и C; онѣ будутъ:

$$v = \Omega.\overline{OB} \text{ и } v_1 = \Omega.\overline{OC} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Съ другой стороны:

$$v = \omega.a \text{ и } v_1 = \omega_1.c \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

(мы буквами a, b и т. д. обозначаемъ также и длину звеньевъ).



фиг. 44-я.

Изъ этихъ двухъ системъ ур-iй легко найдемъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{a.\overline{OC}}{c.\overline{OB}} = \frac{a.\ sin\beta}{c.\ sin\gamma} = \frac{\rho}{\rho_1} \ldots\ldots (3),$$

гдѣ черезъ ρ и ρ_1 обозначены соотвѣтственно длины перпендикуляровъ изъ A и D на CB.

Далѣе, принимая во вниманіе подобіе треугольниковъ AA_1E и DD_1E, окончательно получимъ слѣдующее выраженіе для отношенія скоростей:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{AE}{DE} \ldots\ldots (4).$$

Если мы назовемъ линію, проходящую черезъ A и D, черезъ центры вращенія звеньевъ a и c, линіей центровъ, а продолженіе линіи BC, по направленію которой передается усиліе отъ звена a къ звену c, линіей дѣйствія, то ур-іе (4) можемъ выразить слѣдующей теоремой: линія дѣйствія дѣлитъ линію центровъ на части обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ. Это и есть законъ Willis'а; какъ увидимъ дальше, онъ имѣетъ мѣсто во всѣхъ трехъ нашихъ цѣпяхъ. Разъ намъ извѣстны угловыя скорости звеньевъ a и c, то легко будетъ найти скорости всѣхъ ихъ точекъ, а затѣмъ также скорости и всѣхъ точекъ звена b. Обозначая AE черезъ x, имѣемъ

$$v_1 = \omega.\frac{c.x}{x+d} \ldots\ldots (5).$$

29. Ускореніе точки C. Для того, чтобы эта задача была вполнѣ опредѣленной, мы должны сдѣлать какое-нибудь допущеніе относительно закона измѣненія скорости ω. Разсмотримъ самый простой и въ то же время наиболѣе интересный съ точки зрѣнія практическаго примѣненія разсматриваемаго механизма случай, когда $\omega = const$. Ускореніе точки C (фиг. 44) слагается изъ двухъ векторовъ: 1) тангенціальнаго ускоренія $J_t = \dfrac{dv_1}{dt}$ и нормальнаго ускоренія $J_n = \omega_1{}^2 c$.

На основаніи выводовъ предыдущего параграфа мы имѣемъ

$$= J_t\ \frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega.c.x.}{x+d}\right) = \omega c\frac{d}{(x+d)^2}\frac{dx}{dt},\ J_n = c.\omega^2\frac{x^2}{(x+d)^2}.$$

Намъ нужно опредѣлить еще $\frac{dx}{dt}$—скорость точки E, какъ точки пересѣченія прямыхъ CE и DE, по линіи центровъ. Скорость эта слагается изъ скорости точки E, какъ точки линіи дѣйствія, и скорости этой точки по направленію линіи дѣйствія. Первую скорость w мы знаемъ по величинѣ и направленію; что касается второй скорости и скорости искомой, то намъ извѣстны ихъ направленія. Имѣя такія данныя, мы легко опредѣлимъ скорость точки E по линіи центровъ при помощи слѣдующего построенія.

Изъ точки E ведемъ прямую, перпендикулярную къ OE, и откладываемъ на ней отрѣзокъ $\overline{EF} = w = \Omega.\overline{OE}$; затѣмъ изъ точки F ведемъ прямую, параллельную CE, до пересѣченія съ линіей центровъ. Очевидно, что $\overline{EG} = \frac{dx}{dt}$. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$J_t = \omega.c.\frac{d}{(x+d)^2}.\overline{EG},\ J_n = c.\omega^2\frac{x^2}{(x+d)^2}$$

и полное ускореніе

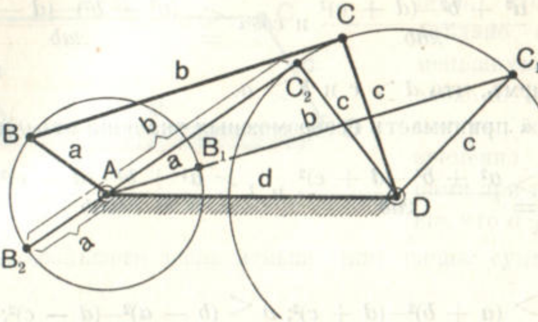
$$J = \frac{\omega.d.c.}{(x+d)^2}\sqrt{\frac{\omega^2 x^4}{d^2} + \overline{EG}^2}\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

понятно, что будетъ имѣть направленіе діагонали прямоугольника, построеннаго на J_t и J_n.

30. Точки возврата; мертвыя положенія. Когда направленіе линіи дѣйствія (фиг. 45) проходитъ черезъ точку A, скорость точки $C = 0$ (ф. 4, § 28). Допустимъ, что соотношеніе частей механизма таково, что звено a можетъ совершать полный оборотъ. Тогда очевидно, что скорость точки C въ двухъ положеніяхъ C_1 и C_2 будетъ равна нулю. Эти двѣ точки называются точками возврата, такъ какъ, дойдя до нихъ, точка C мѣняетъ направленіе своего движенія, т. е., иными словами, эти двѣ точки опредѣляютъ предѣлы колебанія точки C.

Допустимъ теперь, что ведущимъ звеномъ является звено c. При такомъ предположеніи механизмъ будетъ представлять собою ножной приводъ токарнаго станка, точильнаго станка, швейной машины и т. д., гдѣ c есть не что иное, какъ педаль, воспринимающая мускульную силу ноги. Если мы обратимъ опять вниманіе на фиг. 45, то замѣтимъ, что когда точка C

будетъ находиться въ одной изъ точекъ возврата, направленіе вращенія звена a становится неопредѣленнымъ, ибо усиліе, передаваемое отъ педали звеномъ b, направляется вдоль оси a.



фиг. 45-я.

Такія положенія механизма, когда направленіе движенія ведомаго звена, при опредѣленномъ движеніи звена ведущего, становится неопредѣленнымъ, называются **мертвыми положеніями**. Какъ увидимъ дальше, большинство механизмовъ, получаемыхъ изъ шарнирнаго четыреугольника, имѣютъ такія мертвыя положенія. Чтобы вывести механизмъ изъ мертваго положенія въ опредѣленномъ направленіи, прибѣгаютъ чаще всего къ инерціи массъ и съ этою цѣлью на ось A насаживаютъ массивное колесо, называемое **маховикомъ**.

31. Теорема Грасгофа. Выяснимъ, при какихъ условіяхъ уголъ α (фиг. 46) можетъ принимать всевозможныя значенія отъ 0 до 2π, или, иными словами, при какихъ условіяхъ звенья a и b могутъ совершать полное вращеніе около оси пары B.

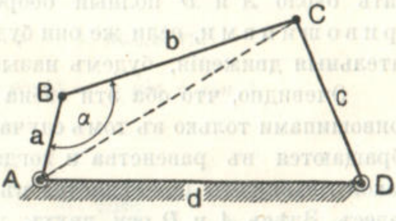
Соединивъ A съ C прямою, мы можемъ написать равенство:

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,\cos\alpha$$

и неравенства:

$$\overline{AC}^2 \geqq (d - c)^2;$$

$$\overline{AC}^2 \leqq (d + c)^2.$$



фиг. 46-я.

которыя обращаются въ равенства, если звенья d и c расположатся по одной прямой.

Отсюда мы легко найдемъ:

$$Cos\alpha \geqq \frac{a^2 + b^2 - (d + c)^2}{2ab} \text{ и } cos\alpha \leqq \frac{(a^2 + b^2) - (d - c)^2}{2ab}.$$

Примемъ, что $d > c$ и $b > a$.

Если α принимаетъ всевозможныя значенія отъ 0 до 2π, то:

$$-1 \geqq \frac{a^2 + b^2 - (d + c)^2}{2ab} \text{ и } 1 \leqq \frac{a^2 + b^2 - (d - c)^2}{2ab},$$

или:

$$0 \geqq (a + b)^2 - (d + c)^2;\ 0 \leqq (b - a)^2 - (d - c)^2;$$

и, наконецъ:

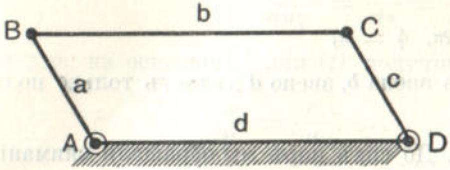
$$d + c \geqq a + b \ldots (1);\ b + c \geqq d + a \ldots (2).$$

Допустимъ, что $d > b$; тогда оба неравенства удовлетворятся при условіи, что $a < c$. Если мы предположимъ, что $b > d$, то опять придемъ къ условію, что $a < c$.

На основаніи этого мы приходимъ къ слѣдующему выводу: уголъ α можетъ принимать всевозможныя значенія между 0 и 2π, если a есть наименьшее звено и если сумма наибольшего и наименьшего звена будетъ меньше или равна суммѣ двухъ другихъ. Это и есть теорема Грасгофа.

Посмотримъ, къ какимъ дальнѣйшимъ заключеніямъ она насъ приводитъ. Предположимъ, что стойкой сдѣлано одно изъ большихъ звеньевъ, звено d. Если звенья a и c будутъ совершать около A и D полный оборотъ, будемъ называть ихъ кривошипами, если же они будутъ совершать только колебательныя движенія, будемъ называть ихъ коромыслами.

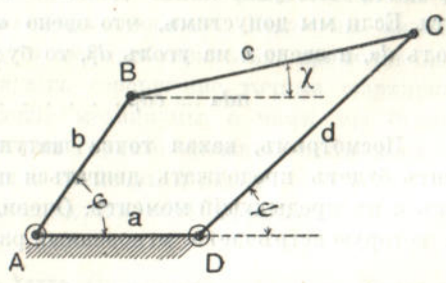
Очевидно, что оба эти звена могутъ быть одновременно кривошипами только въ томъ случаѣ, когда неравенства (1) и (2) обращаются въ равенства и когда $a = c$ и $b = d$ (фиг. 47). Такой механизмъ примѣняется въ паровозахъ для соединенія колесъ. Здѣсь A и D оси двухъ колесъ, a и c соотвѣтственно ихъ спицы, и b спарникъ. Такъ какъ b пересѣкаетъ d всегда на безконечности, то оба кривошипа вращаются всегда съ одною и той же угловою скоростью.



фиг. 47-я.

Предположимъ теперь, что стойкой сдѣлано одно изъ меньшихъ звеньевъ, звено a. Тогда b и d могутъ быть одновременно кривошипами при томъ условіи, что $a \leqq c$ и сумма a и наибольшего звена меньше или равна суммѣ двухъ другихъ.

32. Механизмъ Сильвестра. Этотъ механизмъ представляетъ частный случай шарнирнаго четыреугольника (фиг. 48), когда стойкой сдѣлано одно изъ меньшихъ звеньевъ и когда рядомъ лежащія звенья попарно равны между собою, т. е. $a = b$ и $c = d$. При этихъ условіяхъ b и d будутъ оба кривошипами, причемъ, при одномъ оборотѣ звена d, звено b дѣлаетъ два оборота. Дѣйствительно, проектируя звенья на направленіе AD, имѣемъ:



фиг. 48-я.

$$a + d \cos\psi = b \cos\varphi + c \cos\chi.$$

Имѣя въ виду, что $\chi = \varphi - \psi$, найдемъ:

$$(1 - \cos\varphi)\,(a + c \cos\psi) = c \sin\varphi \sin\psi,$$

или:

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{c} + \cos\psi}{\sin\psi},$$

откуда при $\varphi = 0,\ \psi = 0,$

$$\varphi = \pi,\ \cos\psi = -\frac{a}{c} \text{ и } \pi > \psi > \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = 2\pi,\ \psi = \pi,$$

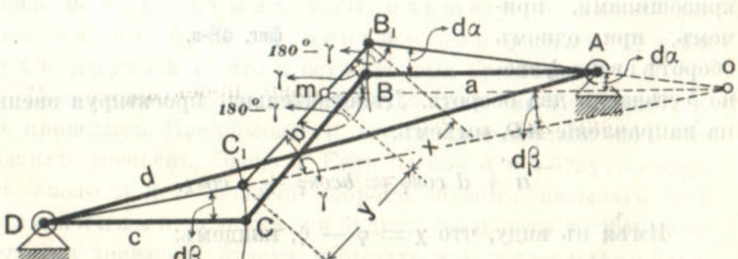
т. е. при одномъ оборотѣ звена b, звено d дѣлаетъ только полъ оборота.

33. Механизмъ Уатта. До сихъ поръ мы обращали вниманіе на движеніе звеньевъ, прилегающихъ къ стойкѣ. Обратимъ теперь вниманіе на движеніе нѣкоторыхъ точекъ промежуточнаго звена; это звено называется обыкновенно шатуномъ.

Разсмотримъ тотъ моментъ, когда оба звена a и c располагаются параллельно (фиг. 49). Такъ какъ мгновенный центръ вращенія шатуна b находится на безконечности, то всѣ его точки въ теченіи безконечно малаго промежутка времени совершаютъ поступательное движеніе и проходятъ одинаковые пути. Если мы допустимъ, что звено a повернется на малый уголъ $d\alpha$, а звено c на уголъ $d\beta$, то будемъ имѣть:

$$a d\alpha = c d\beta \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Посмотримъ, какая точка шатуна и въ слѣдующій моментъ будетъ продолжать двигаться по тому же направленію, какъ и въ предыдущій моментъ. Очевидно, это будетъ та точка m, которую встрѣчаетъ мгновенный радіусъ om, параллельный



фиг. 49-я.

a и c въ начальный моментъ. Найдемъ отношеніе отрѣзковъ $mB_1 = x$ и $mC_1 = y$, на которыя эта точка дѣлитъ длину шатуна. Обозначая $\angle B_1C_1o$ черезъ γ, мы найдемъ, вслѣдствіе малости угловъ $d\alpha$ и $d\beta$, что другіе углы будутъ имѣть ту величину, которая отмѣчена на чертежѣ. Изъ $\triangle\triangle$ OB_1m и OmC_1 имѣемъ:

$$\frac{om}{sin\gamma} = \frac{x}{d\alpha} = \frac{y}{d\beta},$$

откуда, на основаніи ур-ія *(1)*, получимъ:

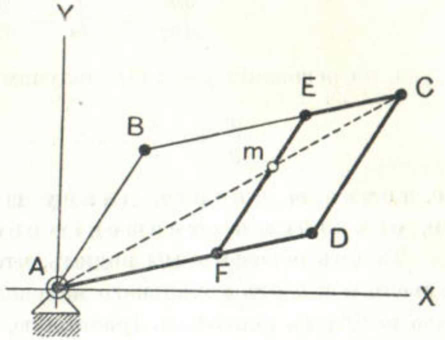
$$\frac{x}{y} = \frac{c}{a} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

т. е. точка m дѣлитъ длину шатуна въ отношеніи, обратномъ отношенію звеньевъ a и c.

Такимъ образомъ мы видимъ, что пока углы отклоненія звеньевъ a и c отъ начальнаго направленія достаточно малы, точка m будетъ описывать траекторію, близко подходящую къ прямой. Если бы мы пожелали, чтобы какая-нибудь точка совершала прямолинейное движеніе, то мы могли бы совмѣстить ее съ точкой m механизма Уатта. Такого рода механизмы называются прямолинейно-направляющими. Какъ мы видимъ, механизмъ Уатта даетъ только приблизительно прямолинейное направленіе, но существуютъ совершенно точные шарнирные прямолинейно-направляющіе механизмы, о чемъ мы будемъ говорить дальше, только они гораздо сложнѣе, такъ какъ состоятъ изъ большаго числа звеньевъ и паръ.

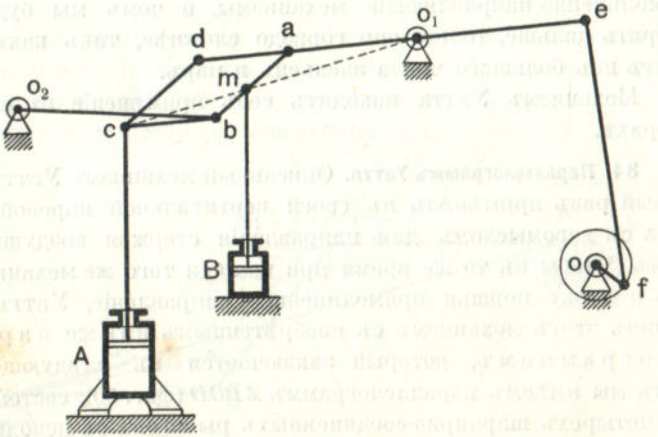
Механизмъ Уатта находитъ себѣ примѣненіе въ индикаторахъ.

34. Параллелограммъ Уатта. Описанный механизмъ Уаттъ въ первый разъ примѣнилъ въ своей вертикальной паровой машинѣ съ коромысломъ для направленія стержня воздушнаго насоса. Чтобы въ то же время при помощи того же механизма дать и штоку поршня прямолинейное направленіе, Уаттъ соединилъ этотъ механизмъ съ изобрѣтеннымъ имъ же параллелограммомъ, который заключается въ слѣдующемъ. Пусть мы имѣемъ параллелограммъ $ABCD$ (фиг. 50), состоящій изъ четырехъ шарнирно-соединенныхъ рычаговъ съ неподвижной точкой A. При движеніи точки C по нѣкоторой траекторіи, всякая точка m, лежащая на діагонали AC, будетъ описывать подобную же траекторію, ибо координаты точки m будутъ всегда пропорціональны координатамъ точки C. Наоборотъ, если точка m будетъ описывать нѣкоторую траекторію, то точка C будетъ описывать подобную же траекторію. Далѣе, мы ничего не измѣнимъ, если проведемъ черезъ точку m линію $EF \# CD$ и выполнимъ затѣмъ эту линію въ видѣ рычага, соединеннаго шарнирами E и F съ BC и AD. Но разъ мы ввели этотъ стержень, то нисколько не измѣняя законовъ движенія, можемъ выбросить часть ABE. Оставшаяся же часть $AFECD$ и будетъ параллелограммъ Уатта.



фиг. 50-я.

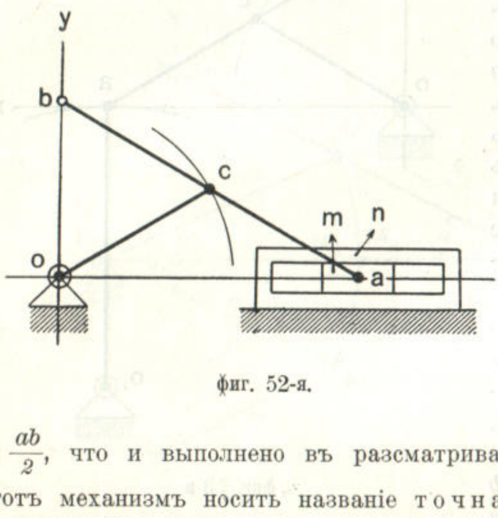
Теперь обратимся къ схемѣ вертикальной паровой машины Уатта (фиг. 51) и посмотримъ, какимъ образомъ Уаттъ соединилъ свой направляющій механизмъ съ своимъ параллело-



фиг. 51-я.

граммомъ. Здѣсь A—паровой цилиндръ; B—воздушный насосъ; de—коромысло, которое качается около оси o_1 и передаетъ вращеніе валу o при помощи шатуна ef и кривошипа of. Для того, чтобы штоки насоса и поршня имѣли всегда вертикальное направленіе, первый изъ нихъ соединенъ съ прямолинейно-направляющимъ механизмомъ o_2b—ba—ao_1, а второй—съ параллелограммомъ $abcd$ такимъ образомъ, что точки c и m лежатъ на одной прямой съ точкой o_1.

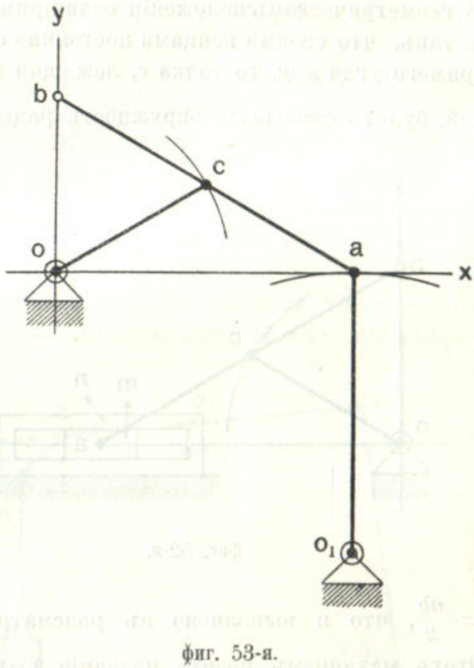
35. Механизмы Эвенса. Прямолинейно-направляющіе механизмы Эвенса основаны на слѣдующемъ извѣстномъ намъ (§§ 5 и 18) геометрическомъ положеніи: если прямая ab (фиг. 52) движется такъ, что своими концами постоянно опирается на стороны прямого угла xoy, то точка c, лежащая на срединѣ этой прямой, будетъ описывать окружность радіусомъ $oc=ac=bc=\frac{ab}{2}$.



фиг. 52-я.

Понятно поэтому, что точка b будетъ двигаться, по прямой oy, если a движется, благодаря ползушкѣ m и направляющей n, по прямой ox, а c описываетъ окружность около o радіусомъ $oc=\frac{ab}{2}$, что и выполнено въ разсматриваемомъ механизмѣ. Этотъ механизмъ носитъ названіе точнаго механизма Эвенса. Онъ совершенно не вошелъ въ употребленіе вслѣдствіе практическихъ неудобствъ, которыя заключаются главнымъ образомъ въ томъ, что между ползушкой m и направляющей n развивается значительное треніе. Но отсюда легко уже получить цѣлый рядъ шарнирныхъ приблизительно прямолинейно-направляющихъ механизмовъ.

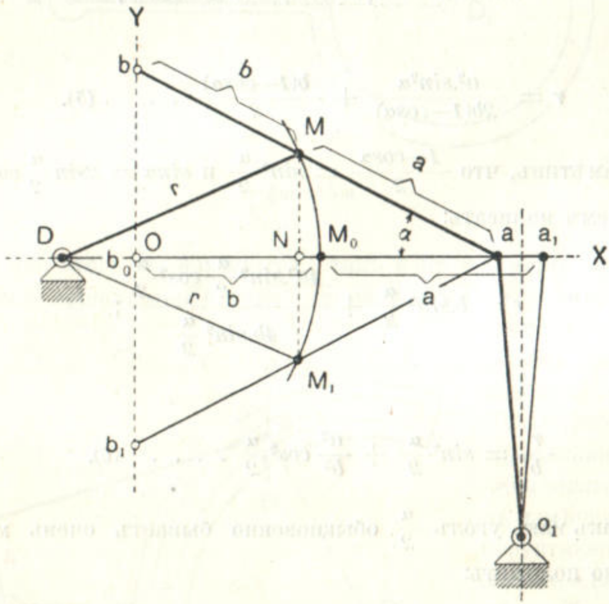
Одинъ изъ такихъ неточныхъ механизмовъ получается довольно просто изъ точнаго механизма Эвенса. Для этого стоитъ только замѣнить поступательное движеніе точки a вращательнымъ около нѣкоторой точки o_1 (фиг. 53) при помощи стержня o_1a. Понятно, что чѣмъ длиннѣе рычагъ o_1a, тѣмъ ближе будетъ совпадать траекторія точки b съ прямой oy. Кромѣ того, и самое положеніе точки o_1 вліяетъ на точность механизма. Оно можетъ быть выбрано такъ, что окружность, описываемая точкой a, будетъ соприкасаться съ прямой ox въ точкѣ, соотвѣтствующей среднему положенію точки a, или такъ, что вышеупомянутая окружность будетъ пересѣкать линію ox въ точкахъ, соотвѣтствующихъ концамъ хода точки a, или, наконецъ, какъ рекомендуетъ извѣстный русскій ученый Чебышевъ, такъ, чтобы эта окружность пересѣкала линію ox въ точкахъ, отстоящихъ отъ средняго положенія точки a на 0,7 полухода. Какъ доказываетъ Чебышевъ, въ этомъ случаѣ траекторія точки b всего ближе подходитъ къ прямой oy.



фиг. 53-я.

Подобный же механизмъ можно получить еще слѣдующимъ образомъ. Извѣстно, что всякая точка прямой ab (фиг. 54) и всякая точка на ея продолженіи описываетъ эллипсъ; если поэтому мы устроимъ механизмъ такъ, что въ то время, какъ точка a, подобно предыдущему, будетъ описывать окружность большого радіуса, близко подходящую къ прямой ox, нѣкоторая, произвольно выбранная, точка прямой ab или ея продолженія будетъ описывать приблизительно соотвѣтствующій эллипсъ, то точка b будетъ описывать приблизительно прямую oy. Замѣнивъ при этомъ дугу эллипса подходящей окружностью, мы получимъ приблизительный прямолинейно-направляющій механизмъ. Возьмемъ точку M (фиг. 54) внутри угла XOY и опредѣлимъ радіусъ MD изъ того условія, что точка b при колебаніи отклоняется въ одну и въ другую сторону отъ точки O на одинаковую величину, и что въ двухъ крайнихъ и въ среднемъ положеніи она находится на прямой OY.

Чтобы получить соотвѣтственныя положенія точки M, надо отъ точекъ b, b_0 и b_1 отложить величины $bM = b_0M_0 = b_1M_1$. Полученныя такимъ образомъ точки M, M_0 и M_1 будутъ, очевидно, принадлежать окружности, которую описываетъ точка M. Зная три точки окружности мы уже безъ затрудненія можемъ опредѣлить центръ, а слѣдовательно и радіусъ этой окружности.



фиг. 54-я.

Опустимъ изъ M на b_0X перпендикуляръ MN и положимъ, что $Mb = b$, $Ma = a$ и $MD = r$. Такъ какъ M и M_0 лежатъ на окружности, то

$$\overline{MN}^2 = (2r - \overline{M_0N})\overline{M_0N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Обозначивъ половину угла размаха прямой ab черсзъ α, найдемъ:

$$\overline{M_\circ N} = \overline{b_\circ M_\circ} - \overline{b_\circ N} = b(1-\cos\alpha) \;.\;.\;.\;.\; (2)$$

и

$$\overline{NM} = a.\sin\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3).$$

Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (*1*), будемъ имѣть:

$$a^2.\sin^2\alpha = [2r - b(1-\cos\alpha)](1-\cos\alpha)b \;.\;.\;.\;.\; (4)$$

или:

$$a^2.\sin^2\alpha = 2r(1-\cos\alpha)b - b^2(1-\cos\alpha)^2,$$

откуда:

$$r = \frac{a^2.\sin^2\alpha}{2b(1-\cos\alpha)} + \frac{b(1-\cos\alpha)}{2} \;.\;.\;.\;.\; (5).$$

Замѣтивъ, что $\frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, мы можемъ написать:

$$r = b.\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{4a^2.\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4b.\sin^2\frac{\alpha}{2}};$$

отсюда:

$$\frac{r}{b} = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{a^2}{b^2}\cos^2\frac{\alpha}{2} \;.\;.\;.\;.\; (6).$$

Такъ какъ уголъ $\frac{\alpha}{2}$ обыкновенно бываетъ очень малъ, то можно положить:

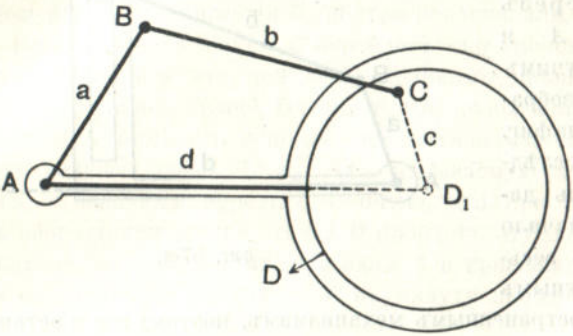
$$\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \text{ и } \cos\frac{\alpha}{2} = 1.$$

Тогда ур—іе (*6*) дастъ:

$$a^2 = rb \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (7),$$

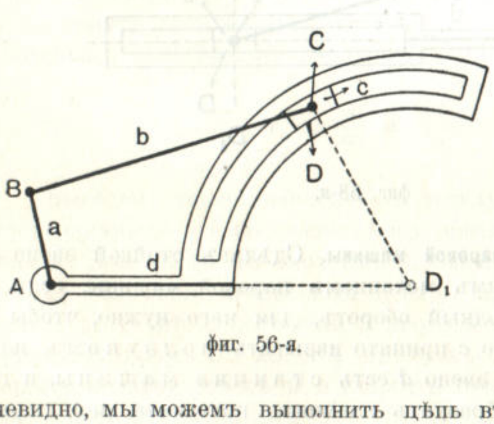
откуда не трудно уже опредѣлить и r, какъ четвертую пропорціональную.

36. Замѣна одной вращательной пары парой поступательной. Будемъ преобразовывать пару *D* въ пару поступательную. Первый шагъ, который мы сдѣлаемъ въ этомъ направленіи будетъ заключаться въ уширеніи цапфы *D* (фиг. 55). Выполнимъ цапфу *D* съ радіусомъ, большимъ звена *c*; тогда звено *c* будетъ представляться самою цапфой. Очевидно, что свойства



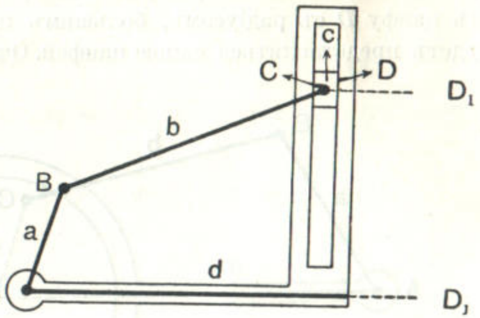
фиг. 55-я.

цѣпи отъ этого не измѣнятся, такъ какъ движеніе, обусловливаемое вращательной парой, не зависитъ отъ размѣровъ ея элементовъ, а зависитъ лишь отъ положенія ея оси. Дальнѣйшее преобразованіе будетъ заключаться въ измѣненіи конструктивной формы предыдущей цѣпи. Такъ какъ точка *C* совершаетъ колебательное движеніе, то,

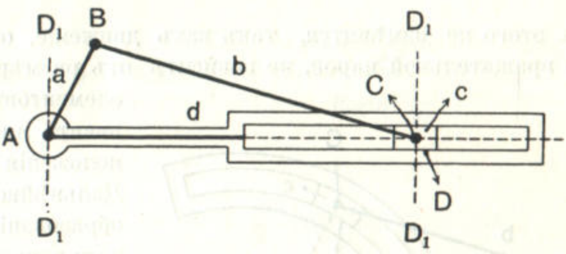


фиг. 56-я.

очевидно, мы можемъ выполнить цѣпь въ томъ видѣ, какъ она изображена на фигурѣ 56. Если мы теперь сдѣлаемъ радіусъ дугообразнаго прорѣза равнымъ безконечно большой величинѣ, то получимъ цѣпь, состоящую изъ трехъ вращательныхъ паръ A, B и C (фиг. 57) и поступательной пары D. Если для такого преобразованія мы возьмемъ шарнирный многоугольникъ, звенья d и c котораго равны между собою, то тогда средняя линія прорѣза, очевидно, пройдетъ черезъ точку A и мы получимъ цѣпь, изображенную на фиг. 58. Эта послѣдняя цѣпь даетъ начало многимъ весьма важнымъ и распространеннымъ механизмамъ, поэтому мы и остановимся на ея изученіи.



фиг. 57-я.



фиг. 58-я.

37. Механизмъ паровой машины. Сдѣлавъ стойкой звено d (фиг. 59), мы получимъ механизмъ паровой машины, если a будетъ совершать полный оборотъ, для чего нужно, чтобы b было больше a. Звено c принято называть ползуномъ или крейцкопфомъ; звено d есть станина машины, и та часть его, которая образуетъ элементъ поступательной пары, называется направляющими или параллелями; A есть главный валъ. Паровая машина устраивается обыкновенно такъ, что кривошипъ a вращается съ постоянною угловою скоростью, такъ что наша задача при изслѣдованіи даннаго механизма будетъ состоять въ опредѣленіи величины скорости и ускоренія ползуна или, что то же, скорости и ускоренія поршня.

Если кривошипъ вращается равномѣрно, то скорость ползуна, какъ мы увидимъ ниже, будетъ постоянно мѣняться. Когда цапфа кривошипа B (фиг. 59) опишетъ полуокружность изъ положенія B_1 до положенія B_2, центръ ползуна, или, вѣрнѣе, центръ крейцкопфнаго болта C перейдетъ изъ положенія C_1 (мы будемъ называть это положеніе крайнимъ правымъ) въ положеніе C_2 (крайнее лѣвое). Очевидно, что положенія C_1 и C_2 соотвѣтствуютъ мертвымъ положеніямъ механизма, если ползунъ есть ведущее звено. Длину C_1C_2, называемую ходомъ поршня, обозначимъ черезъ l. Понятно, что при каждомъ полномъ оборотѣ кривошипа, точка C пройдетъ эту длину два раза. Поэтому, если положимъ, что валъ A и кривошипъ a дѣлаютъ n оборотовъ въ минуту, то C въ минуту пройдетъ путь

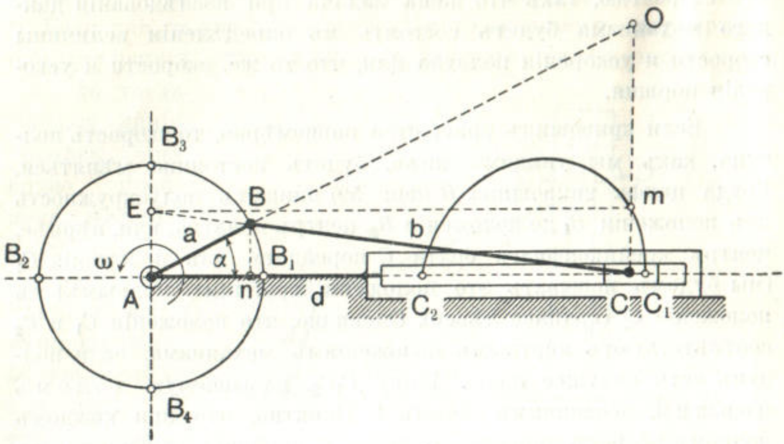
$$s = 2nl.$$

Для сравненія быстроты движенія ползуна или поршня въ различныхъ машинахъ очень часто говорятъ о средней скорости. Средней скоростью v_0 въ секунду называется такая скорость, двигаясь съ которою равномѣрно ползунъ прошелъ бы въ минуту тотъ же путь, который онъ проходитъ въ дѣйствительности. Слѣдовательно,

$$v_0 = \frac{s}{60} = \frac{nl}{30}.$$

Выведемъ теперь зависимость между скоростью ползуна c въ различныхъ его положеніяхъ и угловой скоростью ω кривошипа a. Для этого разсмотримъ движеніе шатуна CB. При данномъ положеніи мгновенный центръ вращенія шатуна находится въ точкѣ пересѣченія O продолженія радіуса AB съ перпендикуляромъ OC къ AC_1 въ точкѣ C. Если обозначимъ скорость ползуна черезъ w и скорость точки B по окружности черезъ v, то будемъ имѣть:

$$\frac{w}{v} = \frac{OC}{OB}.$$



фиг. 59-я.

Продолжимъ направленіе шатуна до пересѣченія въ точкѣ E съ перпендикуляромъ къ B_1B_2 въ точкѣ A. Получимъ $\triangle\ ABE$, который, какъ не трудно видѣть, подобенъ $\triangle\ OBC$, такъ что:

$$\frac{OC}{OB} = \frac{AE}{AB}.$$

Сравнивая эти два равенства, получимъ:

$$\frac{w}{v} = \frac{AE}{AB}$$

или

$$w = \omega.\overline{AE}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Къ тому же результату мы можемъ придти, разсматривая данную цѣпь какъ частный случай шарнирнаго четыреугольника съ звеномъ $c = d = \infty$.

Дѣйствительно, предположимъ, что d не равно безконечности; тогда, на основаніи (форм. 5 § 28), мы имѣемъ:

$$w = \omega.\frac{c.AE}{AE + d}$$

и, полагая $c = d = \infty$,

$$w = \frac{\omega.AE}{\dfrac{AE}{c} + 1} = \omega.\overline{AE}.$$

Теперь намъ нужно доказать, что здѣсь AE имѣетъ то же значеніе, что и въ формулѣ (1). Для этого мы должны вспомнить, что смыслъ преобразованія заключается въ томъ, что точка D удаляется на безконечность въ направленіи, перпендикулярномъ къ AC; слѣдовательно, въ нашемъ случаѣ линіей центровъ будетъ прямая B_4AB_3, а такъ какъ b есть линія дѣйствія, то AE въ фор. (1) имѣетъ то же самое значеніе, что и въ форм. (5) § 28. Отсюда мы можемъ заключить, что то преобразованіе, путемъ котораго мы получили изъ шарнирнаго четыреугольника изслѣдуемую цѣпь, не есть нѣчто искусственное, а, наоборотъ, соотвѣтствуетъ самому существу этихъ двухъ цѣпей. Замѣтимъ, что мы получили бы то же самое выраженіе для скорости поршня, если бы c и не было равно d.

Если мы условимся выражать v длиной AB, то скорость w будетъ выражаться длиной AE, т. е. длиной перпендикуляра изъ центра вала A къ AC до пересѣченія съ направленіемъ шатуна.

Это правило даетъ возможность очень просто строить діаграмму скорости. Для этого возставимъ въ соотвѣтствующей точкѣ C перпендикуляръ и проведемъ черезъ точку E линію параллельную AC до встрѣчи съ этимъ перпендикуляромъ. Отрѣзокъ Cm и представляетъ собою скорость ползуна въ данномъ положеніи. Продѣлывая то же самое при другихъ положеніяхъ механизма, можно построить сколько угодно точекъ m, геометрическое мѣсто которыхъ и опредѣлитъ кривую скоростей или діаграмму скорости. На фиг. 59 показана только половина этой діаграммы; вторая половина будетъ симметрична съ первой относительно линіи AC.

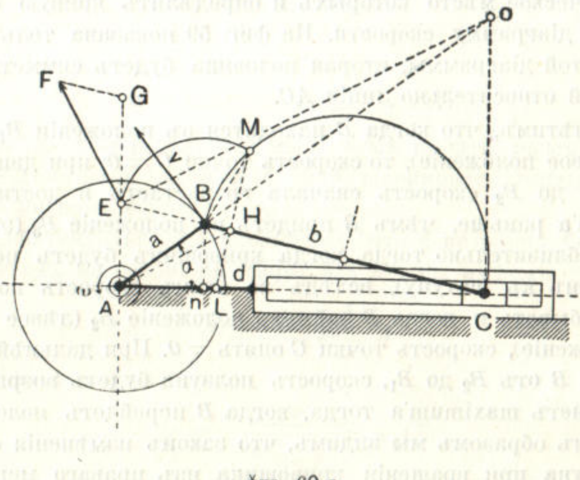
Замѣтимъ, что когда B находится въ положеніи B_1 (правое мертвое положеніе), то скорость точки $C = 0$; при движеніи B отъ B_1 до B_2 скорость сначала возрастаетъ и достигаетъ maximum'а раньше, чѣмъ B придетъ въ положеніе B_3 (это будетъ приблизительно тогда, когда кривошипъ будетъ перпендикуляренъ къ шатуну), вслѣдъ за этимъ скорость ползуна будетъ убывать и, когда B займетъ положеніе B_2 (лѣвое мертвое положеніе), скорость точки C опять $= 0$. При дальнѣйшемъ движеніи B отъ B_2 до B_1, скорость ползуна будетъ возрастать и достигнетъ maximum'а тогда, когда B перейдетъ положеніе B_4. Такимъ образомъ мы видимъ, что законъ измѣненія скорости ползуна при вращеніи кривошипа изъ праваго мертваго положенія къ лѣвому разнится отъ закона измѣненія скорости при вращеніи его изъ лѣваго къ правому.

Если мы предположимъ, что $b = \infty$ (какъ увидимъ дальше существуетъ механизмъ, соотвѣтствующій этому предположенію), то и при томъ и другомъ движеніи скорость достигнетъ своего maximum'а, когда кривошипъ образуетъ прямой уголъ съ линіей мертвыхъ точекъ (линія B_1B_2). Въ этомъ случаѣ кривая скоростей обратится въ окружность, тождественную съ окружностью $B_1B_3B_2B_4$. Дѣйствительно, перемѣщеніе ползуна будетъ тождественно съ передвиженіемъ точки n, конца перпендикуляра изъ B на линію AC и скорость ползуна при этомъ будетъ равна длинѣ nB. Это будетъ простое гармоническое движеніе.

Для опредѣленія ускоренія поршня мы воспользуемся форм. (1) § 29. Полагая въ ней $c = \infty$ и $d = \infty$ и имѣя въ виду, что обѣ безконечности имѣютъ одинъ и тотъ же порядокъ, найдемъ

$$J = \omega . \overline{EG} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

тотъ же самый результатъ мы могли бы получить непосредственно, пользуясь форм. *(1)* даннаго параграфа. Построеніе EG ясно изъ фиг. 60, гдѣ $EF \perp OE$ и $FG \parallel CE$. Но для построенія EG надо построить полюсъ O, что при нѣкоторыхъ положе-



фиг. 60-я.

ніяхъ механизма неудобно, поэтому дадимъ J другое выраженіе. Ведемъ AH параллельно OE и HL перпендикулярно къ CB; тогда, изъ подобія $\triangle\triangle$ EFG и AHL, имѣемъ:

$$\frac{EG}{EF}=\frac{AL}{AH}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

и изъ подобія $\triangle\triangle$ AHB и OEB:

$$\frac{AH}{AB}=\frac{OE}{OB}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4).$$

Замѣчая, наконецъ, что

$$EF=OE.\frac{v}{OB},\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5),$$

изъ (3), (4) и (5) легко найдемъ:

$$EG=\frac{v}{AB}.AL=\omega.AL$$

и

$$J=\omega^2.\overline{AL}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(6).$$

Теперь, чтобы построить точку L, разсмотримъ подобные $\triangle\triangle$ ABE и OBC, а также $\triangle\triangle$ ABH и EBO; имѣемъ:

$$\frac{BE}{BC}=\frac{AB}{OB}\text{ и }\frac{BH}{BE}=\frac{AB}{OB},$$

откуда

$$\overline{BE}^2=BH.BC.$$

Если, такимъ образомъ, мы построимъ полуокружность на BC, какъ на діаметрѣ, засѣчемъ на ней точку M изъ центра B радіусомъ BE, опустимъ изъ M перпендикуляръ на BC и продолжимъ его до AC, то точка пересѣченія этого перпендикуляра съ AC и будетъ искомая точка L.

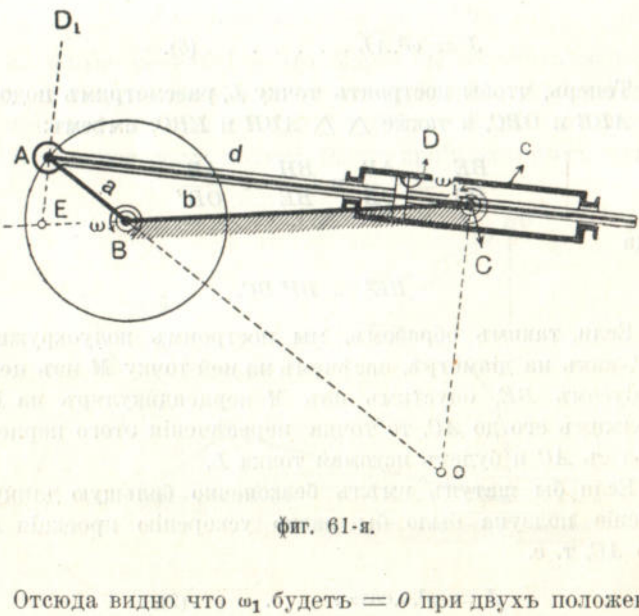
Если бы шатунъ имѣлъ безконечно большую длину, то ускореніе ползуна было бы равно ускоренію проекціи B на линію AC, т. е.

$$J=\omega^2.a.\cos\alpha\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(7).$$

38. Механизмъ качающейся паровой машины. Если мы сдѣлаемъ стойкой звено b (фиг. 61), то получимъ механизмъ качающейся паровой машины. Звенья этого механизма движутся слѣдующимъ образомъ: звено a совершаетъ непрерывно-вращательное движеніе около оси B (ось главнаго вала машины); звено c (цилиндръ машины) совершаетъ колебательное движеніе, вращаясь около оси пары C, и звено d (поршень и штокъ) движется такъ, что постоянно проходитъ черезъ точку C, въ то время какъ его точка A описываетъ окружность; соотвѣтствующій этому движенію мгновенный центръ o находится, очевидно, на пересѣченіи продолженія AB и перпендикуляра къ CA въ точкѣ C.

Для опредѣленія отношенія ω_1 къ ω воспользуемся закономъ Willis'a, принявъ во вниманіе, что точка D_1 находится на безконечности на прямой, проходящей черезъ точку A и перпендикулярной къ CA. Такимъ образомъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{BE}{CE} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

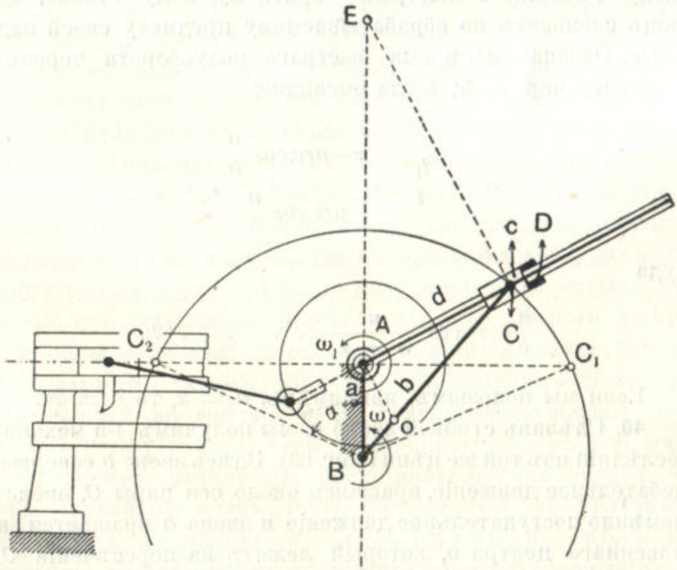


фиг. 61-я.

Отсюда видно что ω_1 будетъ $= 0$ при двухъ положеніяхъ механизма, когда d и a расположатся подъ прямымъ угломъ. Эти два положенія соотвѣтствуютъ крайнимъ положеніямъ звена c. Если ведущимъ звеномъ является d, то механизмъ будетъ въ мертвыхъ положеніяхъ, когда точка A будетъ находиться на линіи центровъ.

Если будетъ дана скорость точки A, то легко будетъ найти скорость каждой точки звена d. Не трудно будетъ также найти угловое ускореніе звена c при помощи построенія, подобнаго тому, которымъ мы пользовались при опредѣленіи ускоренія ползуна паровой машины.

39. Механизмъ Витворта. Если мы сдѣлаемъ стойкой звено a, то получимъ механизмъ, изображенный на фиг. 62-й. Здѣсь звенья d и b совершаютъ непрерывно-вращательныя движенія соотвѣтственно около осей паръ A и B, а звено c, вращаясь около оси пары C, скользитъ въ то же время по звену d. Чтобы найти мгновенный центръ вращенія звена c, вообразимъ, что съ нимъ соединена прямая, проходящая черезъ центръ пары C и параллельная звену d. При движеніи звена c прямая эта будетъ постоянно проходить черезъ точку A, въ то время какъ ея точка C будетъ описывать окружность около центра B. Очевидно, поэтому, что мгновенный центръ вращенія o зве-



фиг. 62-я.

на c находится на пересѣченіи BC и перпендикуляра къ AC въ точкѣ A. Зная скорость точки C, мы найдемъ скорость всякой другой точки звена c.

Что касается отношенія ω_1 къ ω, то мы и здѣсь можемъ найти его, пользуясь закономъ Willis'a и принимая во вниманіе, что линія дѣйствія проходитъ черезъ точку C перпендикулярно къ AC. Такимъ образомъ

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{BE}{AE} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Механизмъ этотъ обладаетъ однимъ замѣчательнымъ свойствомъ, которымъ и воспользовался Витвортъ для устройства своего строгальнаго станка.

Допустимъ, что $\omega = const$; тогда звено d будетъ совершать одинъ полуоборотъ, изъ положенія AC_1 противъ стрѣлки часовъ въ положеніе AC_2, быстрѣе, чѣмъ другой, изъ положенія AC_2 противъ стрѣлки часовъ въ положеніи AC_1. Движеніе звена d передается столу или рѣзцу строгальнаго станка такимъ образомъ, что медленный полуоборотъ соотвѣтствуетъ періоду рѣзанія, а быстрый—обратному ходу станка, когда рѣзецъ скользитъ по обрабатываемому предмету своей задней гранью. Обозначимъ время быстраго полуоборота черезъ t, а медленнаго черезъ t_1; тогда очевидно:

$$n = \frac{t_1}{t} = \frac{\pi - arc.cos\frac{a}{b}}{arc.cos\frac{a}{b}},$$

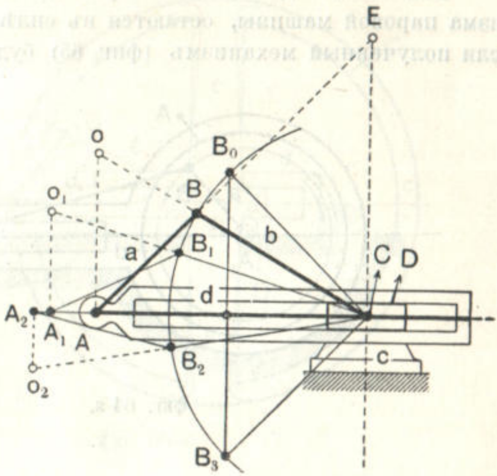
откуда

$$\frac{a}{b} = cos\,\frac{\pi}{n+1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Если мы положимъ, напримѣръ, $n = 2$, то $b = 2a$.

40. Сдѣлавъ стойкой звено c, мы получимъ 4-й механизмъ и послѣдній изъ той же цѣпи (фиг. 63). Здѣсь звено b совершаетъ колебательное движеніе, вращаясь около оси пары C, звено d—перемѣнно поступательное движеніе и звено a вращается около мгновеннаго центра o, который лежитъ на пересѣченіи CB и перпендикуляра къ d въ точкѣ A. Отношеніе между угловой скоростью ω звена b и скоростью скольженія звена d найдется по ф. 5, § 28, если мы положимъ въ ней $d = c = \infty$ и примемъ во вниманіе, что въ данномъ случаѣ линія центровъ есть прямая, проходящая через C и перпендикулярная къ AC, а линія дѣйствія есть AB. Имѣемъ

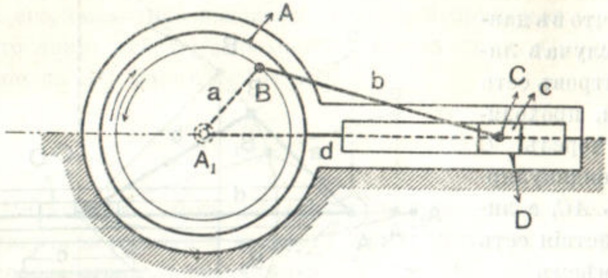
$$w = \omega . \overline{CE} \quad . \quad . \ (1).$$



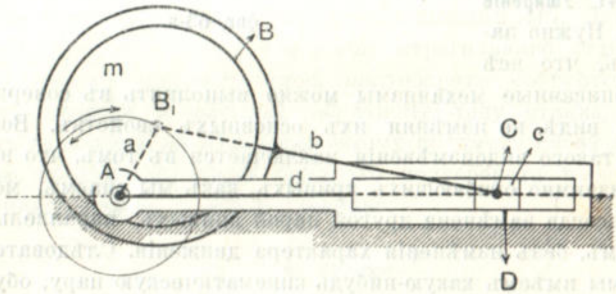
фиг. 63-я.

41. Уширеніе цапфъ. Нужно замѣтить, что всѣ вышеописанные механизмы можно выполнить въ совершенно иномъ видѣ, не измѣняя ихъ основныхъ свойствъ. Возможность такого видоизмѣненія заключается въ томъ, что всякая пара взаимно огибающихъ кривыхъ, какъ мы знаемъ, можетъ быть всегда замѣнена другой парой кривыхъ, параллельныхъ первымъ, безъ измѣненія характера движенія. Слѣдовательно, разъ мы имѣемъ какую-нибудь кинематическую пару, обусловливающую нѣкоторое опредѣленное движеніе, то можно, не измѣняя этого движенія, очертить новые контуры элементовъ этой пары линіями, параллельными прежнимъ контурамъ. Примѣнимъ это свойство паръ для полученія ряда новыхъ механизмовъ изъ механизма паровой машины. Будемъ уширять цапфу пары A до тѣхъ поръ, пока она не заключитъ въ себя цапфу пары B. Такимъ образомъ мы получимъ механизмъ, изображенный на фигурѣ 64-й. Если вмѣсто цапфы A мы уширимъ цапфу пары B, пока она не заключитъ въ себя цапфу A, то получимъ механизмъ, представленный на фигурѣ 65-й. Этотъ механизмъ очень часто примѣняется на практикѣ и извѣстенъ подъ названіемъ **эксцентрика**. Такого рода механизмъ употребляется, напримѣръ, для передвиженія парораспредѣлительныхъ приборовъ въ паровой машинѣ.

Всѣ законы движенія ползуна c, выведенные для механизма паровой машины, остаются въ силѣ и для эксцентрика. Если полученный механизмъ (фиг. 65) будемъ разсматривать



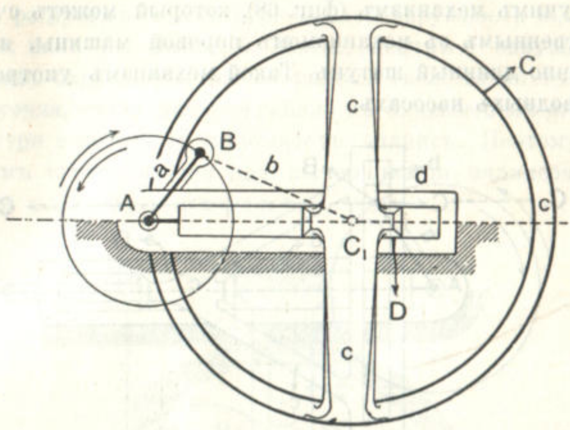
фиг. 64-я.



фиг. 65-я.

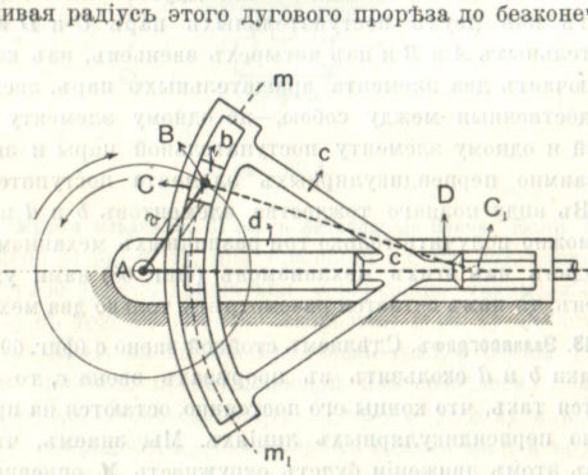
какъ цѣпь, то изъ него можно получить еще три механизма. Между ними заслуживаетъ вниманія тотъ, который получается, если сдѣлать стойкой звено a, т. е. въ данномъ случаѣ дискъ m. Этотъ механизмъ обладаетъ тѣми же свойствами, какъ и механизмъ, изображенный на фигурѣ 62-й, и въ такомъ то именно видѣ онъ и употребляется въ строгальномъ станкѣ Витворта.

Уширимъ теперь цапфу C такъ, чтобы она заключила въ себя цапфу пары B (фиг. 66). Въ то время, какъ кривошипъ a вращается около центра A, цапфа пары B описываетъ полную окружность около того же центра и дискъ b колеблется около центра C_1 цапфы пары C.



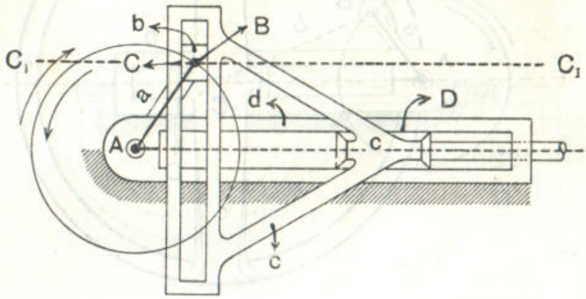
фиг. 66-я.

42. Замѣна пары C поступательной парой. Придавая послѣднему механизму другую конструктивную форму, получимъ механизмъ, изображенный на фигурѣ 67-й. Этотъ механизмъ по своимъ кинематическимъ свойствамъ вполнѣ тождественъ съ механизмомъ паровой машины съ длиной шатуна, равной радіусу средней окружности mm_1 дугового прорѣза, который представляетъ изъ себя полый элементъ вращательной пары C. Увеличивая радіусъ этого дугового прорѣза до безконечности,



фиг. 67-я.

мы получимъ механизмъ (фиг. 68), который можетъ считаться тождественнымъ съ механизмомъ паровой машины, имѣющей безконечно длинный шатунъ. Такой механизмъ употребляется въ приводныхъ насосахъ.

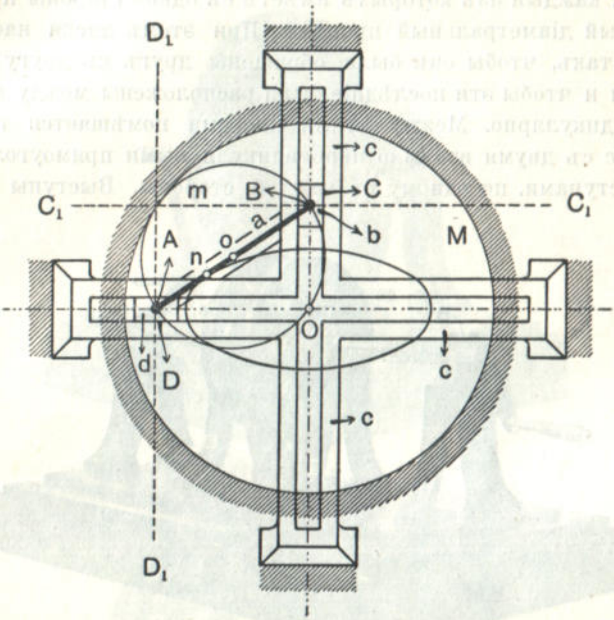


фиг. 68-я.

Но съ другой стороны этотъ механизмъ есть не что иное какъ четырехъ-звенный плоскій шарнирный четыреугольникъ, двѣ рядомъ стоящія вращательныя пары котораго (въ данномъ случаѣ *D* и *C*) обращены въ поступательныя.

Если мы будемъ разсматривать этотъ механизмъ какъ цѣпь, то можемъ получить изъ него нѣсколько различныхъ механизмовъ, дѣлая стойкой то или другое звено. Цѣпь эта состоитъ изъ двухъ поступательныхъ паръ *C* и *D* и двухъ вращательныхъ *A* и *B* и изъ четырехъ звеньевъ, изъ которыхъ *a* заключаетъ два элемента вращательныхъ паръ, звенья *b* и *d*, тождественныя между собою,—по одному элементу вращательной и одному элементу поступательной пары и звено *c*—два взаимно перпендикулярныхъ элемента поступательныхъ паръ. Въ виду полнаго тождества элементовъ *b* и *d* изъ этой цѣпи можно получить только три различныхъ механизма. Такъ какъ одинъ изъ этихъ механизмовъ (фиг. 68) нами уже разсмотренъ, то намъ остается разсмотрѣть только два механизма.

43. Эллипсографъ. Сдѣлаемъ стойкой звено *c* (фиг. 69). Когда ползушки *b* и *d* скользятъ въ прорѣзахъ звена *c*, то звено *a* движется такъ, что концы его постоянно остаются на прямыхъ, взаимно перпендикулярныхъ линіяхъ. Мы знаемъ, что полоидой въ этомъ движеніи будетъ окружность *M*, описанная изъ *O*, точки пересѣченія прямыхъ, по которымъ скользятъ концы звена *a*, радіусомъ $= a$ и серполоидой окружность *m*, описанная на *a*, какъ на діаметрѣ. Далѣе, центръ *o* окружности *m* описываетъ окружность того же радіуса около точки *O* и всякая другая точка, связанная неизмѣнно съ окружностью *m* и лежащая внутри или внѣ ея, описываетъ эллипсъ. Поэтому этотъ механизмъ употребляется для вычерчиванія эллипсовъ и называется эллипсографомъ.



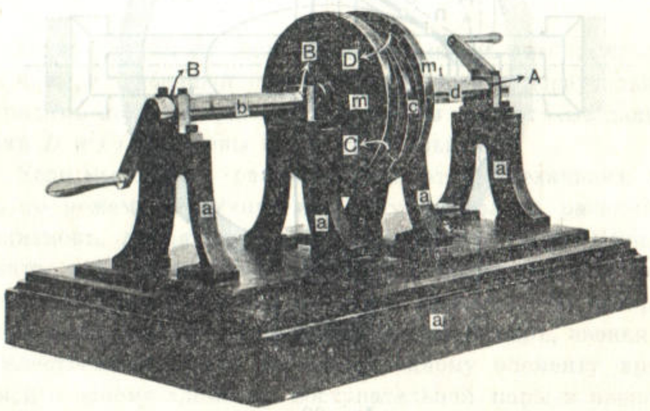
фиг. 69-я.

44. Муфта Ольдгэма. Станокъ Леонардо-да-Винчи. Если сдѣлаемъ стойкой звено *a*, то, при вращеніи одного изъ звеньевъ *b* или *d*, другое будетъ вращаться совершенно такимъ-же образомъ, т. е. съ тою же угловою скоростью и въ ту же сторону, такъ какъ оба эти звена кинематически тождественны. Крестообразный прорѣзъ, представляющій изъ себя звено *c*, будетъ совершенно одинаково скользить по тому и другому изъ звеньевъ *b* и *d*. Полоидой въ этомъ случаѣ будетъ малый кругъ *m*, а серполоидой большой *M*. Точка *O*, очевидно, будетъ описывать окружность *m* (чер. 69).

Этотъ механизмъ находитъ себѣ примѣненiе въ муфтѣ Ольдгэма (Oldham'а) и въ станкѣ Леонардо-да-Винчи.

Муфта Ольдгэма (фиг. 70) служитъ для соединенiя двухъ параллельныхъ валовъ, вращающихся въ одну сторону и съ одинаковыми угловыми скоростями, если оси ихъ между собой не совпадаютъ.

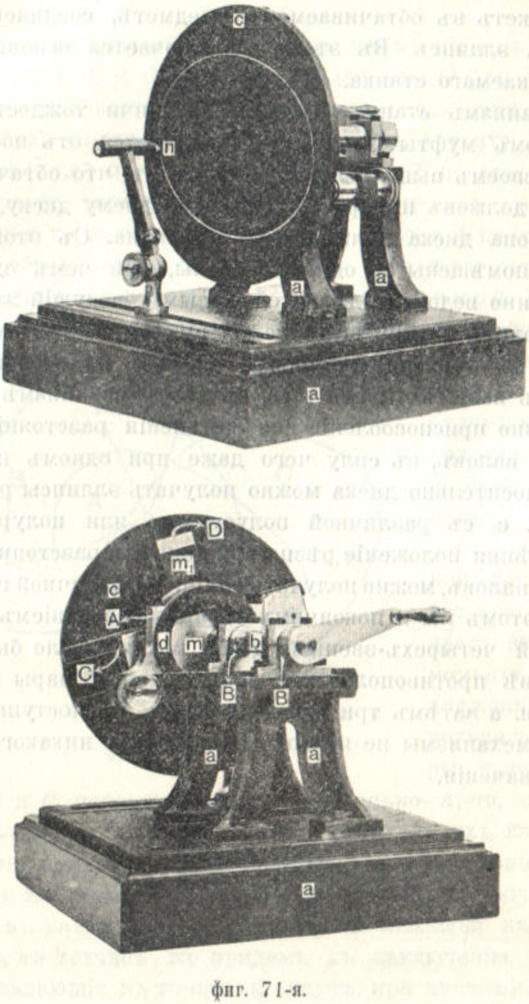
Для этой цѣли на концы валовъ b и d насаживаютъ диски m и m_1, каждый изъ которыхъ имѣетъ съ одной стороны прямоугольный дiаметральный прорѣзъ. При этомъ диски насаживаютъ такъ, чтобы они были обращены другъ къ другу прорѣзами и чтобы эти послѣднiе были расположены между собою перпендикулярно. Между этими дисками помѣщается третiй дискъ c съ двумя взаимно перпендикулярными прямоугольными выступами, по одному съ каждой стороны. Выступы этого



фиг. 70-я.

диска помѣщаются въ соотвѣтственные прорѣзы дисковъ m и m_1. Не трудно видѣть, что полученный такимъ образомъ механизмъ совершенно тождественъ съ предыдущимъ. Стойка, заключающая въ себѣ два элемента двухъ вращательныхъ паръ B и A, тождественна съ звеномъ a; валы съ дисками, заключающiе въ себѣ по одному элементу вращательныхъ паръ A и B и по одному элементу поступательныхъ паръ C и D, тождественны съ звеньями b и d и среднiй дискъ c, несущiй на себѣ два элемента поступательныхъ паръ C и D, тождественъ со звеномъ c. Понятно, что дискъ c во время движенія будетъ скользить своими выступами въ соотвѣтственныхъ прорѣзахъ дисковъ m и m_1; его центръ будетъ описывать окружность съ діаметромъ a = разстоянію между центрами валовъ b и d.

Станокъ Леонардо-да Винчи (фиг. 71) служитъ для обтачиванія по эллипсамъ. Чтобы понять его устройство, обратимъ



фиг. 71-я.

вниманіе на слѣдующее обстоятельство. Всякая точка, соединенная со звеномъ a въ механизмѣ (фиг. 69), какъ мы видѣли, описываетъ эллипсъ (за исключеніемъ точекъ, лежащихъ на окружности m и по срединѣ звена a). Если мы соединимъ эллипсъ, описанный, напримѣръ, точкой n со звеномъ c и сдѣлаемъ звено a стойкой, то этотъ эллипсъ при движеніи звена c относительно звена a будетъ постоянно проходить черезъ точку n. Поэтому, если поставить въ этой точкѣ рѣзецъ, то онъ вырѣжетъ въ обтачиваемомъ предметѣ, соединенномъ со звеномъ c, эллипсъ. Въ этомъ и заключается основная идея разсматриваемаго станка.

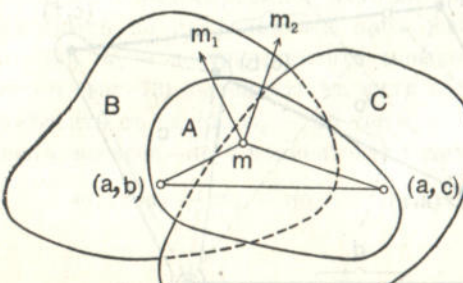
Механизмъ станка Леонардо-да-Винчи тождественъ съ механизмомъ муфты Ольдгэма и отличается отъ послѣдняго лишь въ своемъ выполненіи. Дѣло въ томъ, что обтачиваемый предметъ долженъ прикрѣпляться къ среднему диску, поэтому одна сторона диска должна быть свободна. Съ этою цѣлью оба вала помѣщены съ одной стороны, при чемъ одинъ изъ нихъ, именно ведомый, дѣлается полымъ, ведущій же, сплошной, проходитъ внутри его. Дискъ c вмѣсто выступовъ имѣетъ два взаимно перпендикулярныхъ прорѣза на сторонѣ, обращенной къ валамъ. Кромѣ того, въ этомъ механизмѣ имѣется обыкновенно приспособленіе для измѣненія разстоянія между центрами валовъ, въ силу чего даже при одномъ положеніи рѣзца относительно диска можно получать эллипсы различной формы, т. е. съ различной полусуммою или полуразностью осей. Измѣняя положеніе рѣзца при данномъ разстояніи между центрами валовъ, можно получать эллипсы различной величины.

На этомъ мы и покончимъ съ преобразованіемъ плоской шарнирной четырехъ-звенной цѣпи. Можно было бы еще обратить двѣ противоположныя вращательныя пары въ поступательныя, а затѣмъ три вращательныхъ въ поступательныя, но такіе механизмы не имѣютъ совершенно никакого практическаго значенія.

ОТДѢЛЪ 3-ій.

Сложные шарнирные механизмы.

45. Теорема Аронгольда. Положимъ, что мы имѣемъ три плоскихъ фигуры A, B и C (фиг. 72), каждая изъ которыхъ какъ то движется по плоскости. Будемъ разсматривать движеніе каждой изъ этихъ фигуръ относительно двухъ другихъ и обозначимъ мгновенный центръ вращенія фигуры B по отношенію къ A, или обратно, черезъ (a, b), мгновенный центръ вращенія C по отношенію къ A, или обратно, черезъ (a, c) и B по отношенію къ C, или обратно, черезъ (b, c). В с ѣ э т и т р и м г н о в е н н ы х ъ ц е н т р а л е ж а т ъ н а о д н о й п р я м о й. Въ этомъ и состоитъ теорема Аронгольда. Для доказательства допустимъ, что мы нашли мгн. ц. (a, b) и (a, c); будемъ искать положеніе мгн. ц. (b, c). Мгновенный центръ есть та точка неподвижной фигуры, съ которою совпадаетъ въ данный моментъ неподвижная точка подвижной фигуры; если же обѣ

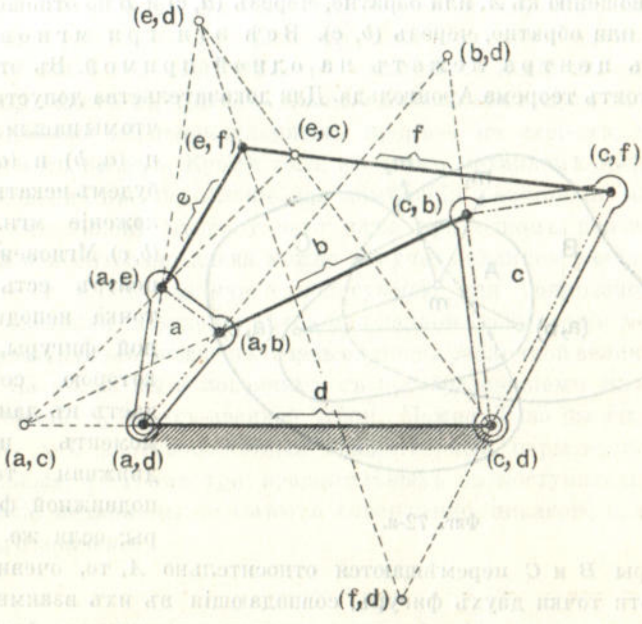


Фиг. 72-я.

фигуры B и C перемѣщаются относительно A, то, очевидно, обѣ эти точки двухъ фигуръ, совпадающія въ ихъ взаимномъ мгновенномъ центрѣ, будутъ совершать относительно фигуры A одно и то же движеніе. Если мы допустимъ, что мгн. ц. (b, c) находится въ какой нибудь точкѣ m, не лежащей на прямой (a, b) (a, c), то тотчасъ же придемъ къ заключенію, что двѣ точки, совпадающія въ точкѣ m, будутъ, при движеніи фигуръ

B и *C* относительно *A*, совершать различныя движенія: точка *m* фигуры *B* будетъ перемѣщаться по mm_1, по направленію перпендикулярному къ $(a, b)m$, а точка *m* фигуры *C*—по mm_2, по направленію перпендикулярному къ $(a, c)m$. Оба эти направленія совпадутъ лишь въ томъ случаѣ, если (b, c) расположится на линіи (a, b) (a, c). Покажемъ на примѣрѣ, какимъ образомъ при помощи теоремы Аронгольда можно изслѣдовать сложные шарнирные механизмы.

Примѣръ. Разсмотримъ шестизвенный механизмъ, у котораго стойкой сдѣлано звено *d* (фиг. 73). Звенья *d*, *b*, *e* и *f* заключаютъ въ себѣ по два элемента вращательныхъ паръ, а звенья *a* и *c*—по три. Чтобы знать движеніе всѣхъ частей механизма, надо найти всѣ мгновенные центры по отношенію къ *d*. Мгн. центры (a, d) и (c, d) находятся непосредственно,



фиг. 73 я.

(b, d), очевидно, лежитъ на пересѣченіи (a, d) (a, b) и (c, d) (c, b); чтобы найти (e, d), надо сначала найти (e, c), который лежитъ на пересѣченіи (a, c) (a, e) и (c, f) (e, f), а затѣмъ найдется и (e, d), пересѣченіемъ (e, c) (c, d) и (a, d) (a, e). Наконецъ, (f, d) находится на пересѣченіи (e, d) (e, f) и (c, f) (c, d). Если будетъ задана скорость какой нибудь одной точки механизма, то можно найти тотчасъ же скорость и всякой другой.

46. Условія, которымъ долженъ удовлетворять шарнирный механизмъ.

Вообразимъ себѣ шарнирный механизмъ, состоящій изъ n звеньевъ и m осей. Допустимъ, что изъ числа n звеньевъ n_2 звеньевъ имѣютъ по два элемента кинематическихъ паръ, какъ напримѣръ, звенья e, b и т. д. (фиг. 73), n_3 звеньевъ имѣютъ по три элемента паръ, напримѣръ, звенья a и c (фиг. 73), n_4—по четыре элемента и т. д; наконецъ, n_i по i элементовъ; тогда мы имѣемъ:

$$n = n_2 + n_3 + n_4 + \ldots + n_i \ldots \quad (1);$$

число элементовъ

$$e = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \ldots + in_i \ldots \quad (2).$$

Предположимъ далѣе, что изъ числа m осей m_2 осей соединяютъ по два элемента паръ [оси (a, d), (c, d) и т. д. (фиг. 73)], m_3 — по три элемента [можно было бы, напримѣръ, звено a (фиг. 73) выполнить въ видѣ простого стержня и (a, e) совмѣстить съ (a, b)], m_4 — по четыре элемента и т. д.; наконецъ. m_k осей—по k элементовъ; такимъ образомъ, имѣемъ:

$$m = m_2 + m_3 + m_4 + \ldots + m_k \ldots \quad (3)$$

и

$$e = 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 + \ldots + km_k \quad \ldots (4).$$

Чтобы выяснить себѣ, какими условіями будутъ связаны между собою величины n_2, n_3 и т. д. съ величинами m_2, m_3 и т. д., если наше шарнирное сочлененіе представляетъ собою механизмъ, замѣтимъ, что механизмъ обращается въ крѣпкую (неизмѣняемую) систему, если мы прибавимъ къ нему одинъ стержень. Въ самомъ дѣлѣ, соединивъ, напримѣръ, расположенныя по діагоналямъ точки шарнирнаго четыреугольника стержнемъ, мы обратимъ его въ неизмѣняемую систему, соединивъ точки (e, f) и (c, b) механизма, изображеннаго на фиг. 73, стержнемъ, мы также обратимъ его въ неизмѣняемую систему.

Вслѣдствіе этого механизмъ долженъ имѣть на одинъ стержень меньше, чѣмъ неизмѣняемая система съ тѣмъ же числомъ узловъ.

Извѣстно, что неизмѣняемая система, имѣющая m узловъ, должна заключать въ себѣ $2m-3$ стержня, поэтому всякій механизмъ долженъ удовлетворять слѣдующему равенству:

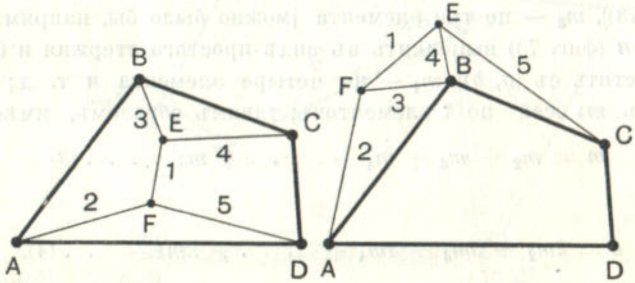
$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \ldots + (2i-3)\,n_i + 1 = 2m - 3$$

или

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \ldots + (2i-3)\,n_i = 2m - 4 \quad \ldots (5),$$

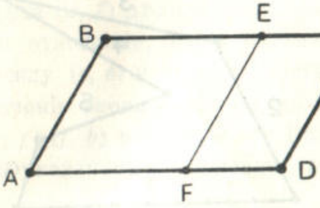
такъ какъ звено, соединяющее два элемента паръ, равносильно одному стержню; соединяющее 3 элемента,—равносильно 3 стержнямъ; соединяющее 4 элемента,—5 стержнямъ и, вообще, соединяющее i элементовъ равносильно $(2i-3)$ стержнямъ.

Къ такому же соотношенію мы пришли бы и въ томъ случаѣ, если бы исходили изъ предположенія, что мы обращаемъ механизмъ въ неизмѣняемую систему введеніемъ двухъ новыхъ осей (фиг. 74), ибо при этомъ вводятся 5 новыхъ стержней.



фиг. 74-я.

Условіе (5) является достаточнымъ признакомъ шарнирнаго механизма; однако же, при составленіи этого условія слѣдуетъ выключать, такъ называемые, **лишніе стержни**, т. е. стержни, соединяющіе двѣ точки, которыя и безъ того находились бы при всякомъ положеніи частей механизма на одномъ и томъ же разстояніи. Такъ примѣръ, если мы примѣнимъ условіе (5) къ сочлененію, изображенному на фиг. 75, то придемъ къ заключенію, что это сочлененіе представляетъ собою неизмѣняемую систему, тогда какъ въ дѣйствительности это есть механизмъ, такъ какъ стержень EF, равный и параллельный AB и DC, является лишнимъ стержнемъ. Понятно, что если шарнирное сочлененіе представляетъ крѣпкую систему, оно должно удовлетворять неравенству:



фиг. 75-я.

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \ldots + (2i - 3)n_i > 2m - 4;$$

если же оно представляетъ цѣпь, но не принужденнаго движенія, то должно удовлетворять неравенству:

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \ldots + (2i - 3)n_i < 2m - 4.$$

Выведемъ еще одинъ признакъ шарнирнаго механизма. Для этой цѣли сравнимъ вторыя части ур-ій (2) и (4) и умножимъ всѣ члены на 2; получимъ:

$$4n_2 + 6n_3 + 8n_4 + \ldots + 2in_i = 4m_2 + 6m_3 + \ldots + 2km_k \quad \ldots (6).$$

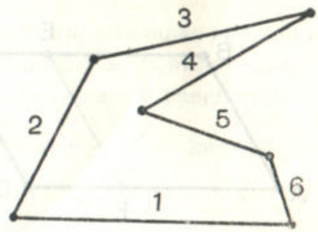
Затѣмъ перепишемъ условіе (5) въ такомъ видѣ:

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \ldots + (2i - 3)n_i = 2m_2 + 2m_3 + 2m_4 + \ldots + 2m_k - 4$$

и будемъ вычитать его почленно изъ ур-ія (6); тогда получимъ:

$$3n = 2\{m_2 + 2m_3 + 3m_4 + \ldots + (k - 1)m_k\} - 4 \quad \ldots (7).$$

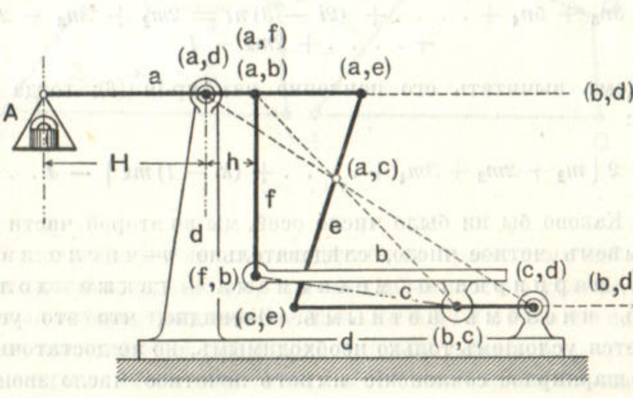
Каково бы ни было число осей, мы во второй части ур-ія (7) имѣемъ четное число, слѣдовательно n—число звеньевъ шарнирнаго механизма — также должно быть числомъ четнымъ. Очевидно, что это условіе является условіемъ только необходимымъ, но не достаточнымъ. Если шарнирное сочлененіе имѣетъ нечетное число звеньевъ, то мы можемъ утверждать, что оно не представляетъ собою механизма; но если шарнирное сочлененіе имѣетъ четное число звеньевъ, то мы не можемъ сказать, что оно является механизмомъ. Такъ напримѣръ, сочлененіе, изобр. на фиг. 76, не есть цѣпь принужденнаго движенія, хотя и имѣетъ четное число звеньевъ.



фиг. 76-я.

Разсмотримъ нѣсколько сложныхъ шарнирныхъ механизмовъ.

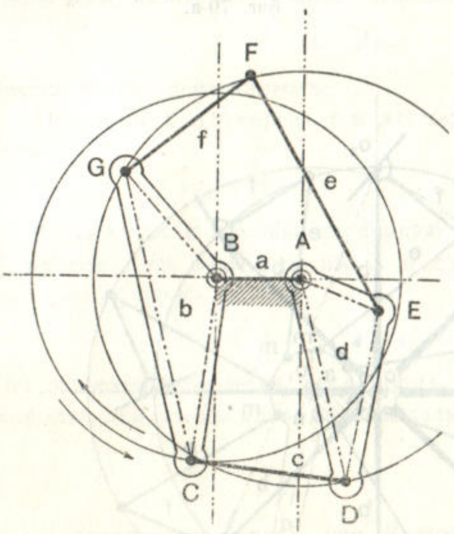
47. Вѣсы Квинтенца (фиг. 77). Вѣсы Квинтенца представляютъ собою механизмъ, что легко обнаружить при помощи ур-ія (5) предыдущаго параграфа, съ семью осями и шестью звеньями. Звено b есть платформа, на которую кладется взвѣшиваемый грузъ, а A—чашка для гирь. Размѣры частей механизма должны быть соображены такъ, чтобы платформа b перемѣщалась изъ положенія, изображеннаго на чертежѣ, когда звенья a и b горизонтальны, поступательно и при томъ на ту же величину, какъ и точка (a, b). Въ такомъ случаѣ, очевидно, отношеніе вѣса груза къ вѣсу гирь, будетъ равно отношенію H къ h. Для этого необходимо, во первыхъ, чтобы стержень f имѣлъ вертикальное направленіе, ибо тогда перемѣщенія его концовъ должны быть одинаковы, а, во вторыхъ, чтобы мгновенный центръ вращенія (b, d) лежалъ на безконечности, на пересѣченіи двухъ горизонтальныхъ прямыхъ. Одна изъ этихъ



фиг. 77-я.

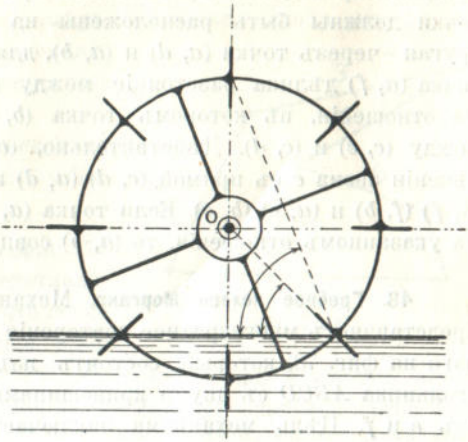
прямыхъ проходитъ черезъ точки (b, c) и (c, d), поэтому эти точки должны быть расположены на одной горизонтали, а другая - черезъ точки (a, d) и (a, b), для чего требуется, чтобы точка (a, f) дѣлила разстояніе между (a, d) и (a, e) въ томъ же отношеніи, въ которомъ точка (b, c) дѣлитъ разстояніе между (c, e) и (c, d). Дѣйствительно, (a, c) лежитъ на пересѣченіи звена e съ прямой (c, d) (a, d) и (a, b) на пересѣченіи (a, f) (f, b) и (a, c) (b, c). Если точка (a, f) дѣлитъ (a, d) (a, e) въ указанномъ отношеніи, то (a, b) совпадетъ съ (a, f).

48. Гребное колесо Моргана. Механизмъ колеса Моргана представляетъ многократное повтореніе механизма, изображеннаго на фиг. 78, который состоитъ изъ шарнирнаго четыреугольника $ABCD$ съ двумя кривошипами и еще двухъ звеньевъ e и f. Цѣль механизма заключается въ поворачиваніи лопастей такъ, чтобы въ моментъ погруженія въ воду и въ моментъ выхода изъ воды онѣ образовывали не особенно малый уголъ съ поверхностью воды, ибо при маломъ углѣ работа лопасти сопровождается вредными потерями, что и имѣетъ мѣсто при обыкновенномъ колесѣ (фиг. 79) съ радіальными неподвижными лопастями. Размѣры частей механизма колеса Моргана (фиг. 80) соображаются такъ,

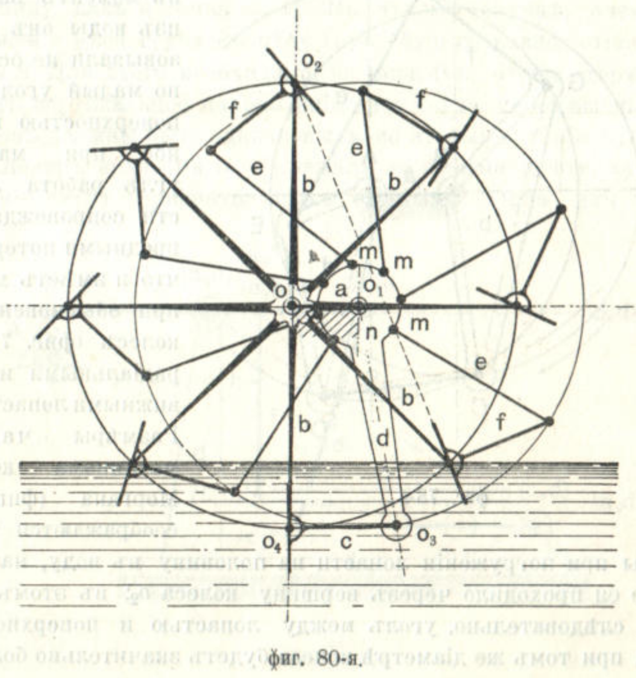


фиг. 78-я.

чтобы при погруженіи лопасти на половину въ воду, направленіе ея проходило черезъ вершину колеса o_2; въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, уголъ между лопастью и поверхностью воды при томъ же діаметрѣ колеса будетъ значительно больше, чѣмъ въ случаѣ простого колеса. На фиг. 80 изображена схема расположенія частей колеса Моргана. На главный валъ *o* насажена крѣпко втулка, съ которою неизмѣнно соединены спицы *b*; на нѣкоторомъ разстояніи отъ главнаго вала располагается неподвижная ось o_1, на которую свободно надѣвается дискъ *n*. Съ этимъ



фиг. 79-я.



фиг. 80-я.

послѣднимъ соединяются шарнирно тяги e, за исключенiемъ одной изъ нихъ d, которая составляетъ съ дискомъ одно цѣлое. Основанiемъ всего механизма является шарнирный четыреугольникъ $oo_1o_3o_4$, въ которомъ звено a сдѣлано стойкой, а звенья d и b совершаютъ полныя вращенiя, для чего необходимо, чтобы $a + d \leqq b + c$.

49. Механизмъ Поселье. Механизмъ Поселье представляетъ собою первый по времени изобрѣтенiя точный прямолинейнонаправляющiй механизмъ. Въ настоящее время извѣстно много подобныхъ механизмовъ и всѣ они основаны на слѣдующемъ геометрическомъ положенiи.

Возьмемъ на одной прямой три точки A, C и B (фиг. 81) и предположимъ, что въ то время, какъ эта прямая вращается около точки A, точки C и B перемѣщаются по ней такъ, что произведенiе ихъ перемѣнныхъ разстоянiй отъ точки A, т. е.

$$\overline{AC}\ \overline{AB}$$

остается всегда постояннымъ.

Обозначимъ AB черезъ r и AC черезъ r_1; тогда будемъ имѣть:

$$r.r_1 = c \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Если точка B описываетъ кривую, которая въ полярныхъ координатахъ съ полюсомъ въ A и съ полярною осью AX выражается ур-iемъ

$$r = f(\varphi), \ldots\ldots\ldots (2),$$

то на основанiи равенства (1) найдемъ, что точка C будетъ описывать при этомъ кривую, выражаемую ур-iемъ:

$$r_1 = \frac{c}{f(\varphi)} \ldots\ldots\ldots (3).$$

Предположимъ теперь, что B описываетъ прямую BM, перпендикулярную къ AX въ точкѣ M, причемъ $AM = a$. Тогда уравненiе траекторiи точки B напишется такъ:

$$\overline{AB}.cos\varphi = \overline{AM}$$

или:

$$r = \frac{a}{cos\varphi} \ldots\ldots\ldots (4).$$

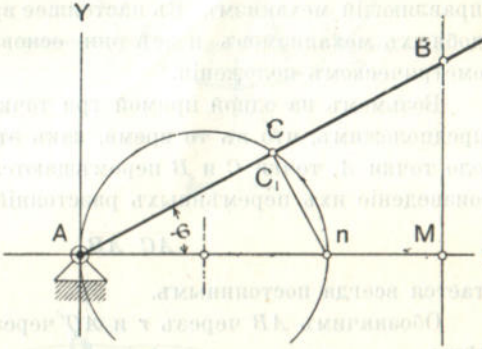
Найдемъ теперь ур-іе траекторіи точки C при условіи, что

$$\overline{AB}.\overline{AC} = r.r_1 = b \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Это уравненіе мы получимъ, исключивъ r изъ двухъ предыдущихъ ур-ій; такимъ образомъ, будемъ имѣть:

$$r_1 = \frac{b}{r} = \frac{b.cos\alpha}{a} \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

Не трудно показать, что кривая, выражаемая этимъ уравненіемъ, есть окружность съ діаметромъ $\frac{b}{a}$, проходящая черезъ точку A и съ центромъ на полярной оси. Дѣйствительно, отложивъ на прямой AX длину $\overline{An} = \frac{b}{a}$ и



фиг. 81-я.

построивъ на ней, какъ на діаметрѣ, окружность, которая пересѣчетъ прямую AB въ нѣкоторой точкѣ, положимъ C_1, мы изъ прямоугольнаго треугольника AC_1n получимъ:

$$\overline{An}.cos\varphi = \overline{AC_1}$$

или:

$$\overline{AC_1} = \frac{b}{a} \, cos\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7).$$

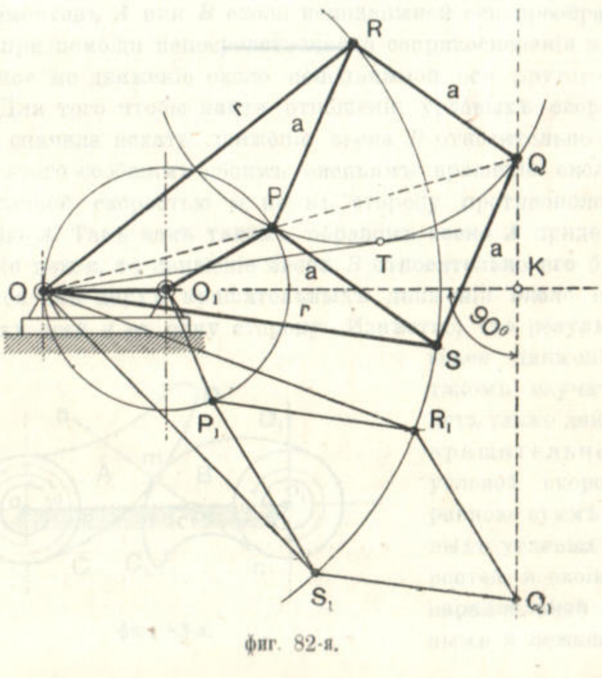
Сравнивая ур—ія (6) и (7), находимъ, что

$$\overline{AC_1} = \overline{AC} = r_1.$$

Понятно поэтому, что если мы составимъ такое шарнирное сочлененіе, въ которомъ будутъ выполнены три слѣдующихъ условія: 1) три точки A, B и C—лежатъ на одной прямой; 2) $\overline{AC}.\,\overline{AB} = const.$, и 3) при неподвижной точкѣ A, точка C описываетъ окружность, проходящую черезъ точку A, то точка B будетъ описывать прямую, перпендикулярную къ линіи, соединяющей точку A съ центромъ окружности, описываемой точкой C.

Всѣ эти условія и выполнены въ механизмѣ Peaucellier (фиг. 82). Устройство этого механизма таково. Взятъ шарнирный ромбъ $PRQS$ со стороною a и двѣ вершины его R и S соединены рычагами равной длины r съ неподвижной точкой O, лежащей на продолженіи линіи QP. Очевидно, что при всѣхъ положеніяхъ механизма точки O, P и Q будутъ оставаться на одной прямой. Первое условіе, слѣдовательно, выполнено. Легко показать, что и второе условіе также имѣетъ мѣсто. Дѣйствительно, опишемъ изъ точки R дугу окружности, проходящую черезъ P и Q, и проведемъ къ ней касательную OT изъ точки O; тогда на основаніи извѣстнаго положенія геометріи, что квадратъ касательной равняется произведенію сѣкущей на внѣшній отрѣзокъ, будемъ имѣть:

$$\overline{OT^2} = OP.\ OQ.$$



фиг. 82-я.

Съ другой стороны изъ прямоугольнаго треугольника OTR находимъ, что

$$\overline{OT}^2 = r^2 - a^2.$$

Сравнивая два предыдущія равенства, видимъ, что у нихъ лѣвыя части равны, слѣдовательно и правыя должны быть равны, т. е.

$$\overline{OP}.\overline{OQ} = r^2 - a^2 = const.$$

Чтобы выполнить третье условіе, заставимъ P двигаться по окружности, проходящей черезъ O. Для этого мы должны шарнирно соединить точку P съ точкой O_1, опредѣляемой изъ условія, что

$$\overline{O_1P} = \overline{OO_1}.$$

Если мы теперь сдѣлаемъ OO_1 стойкой механизма, то точка Q и будетъ описывать прямую QK, перпендикулярную къ продолженію стойки OO_1.

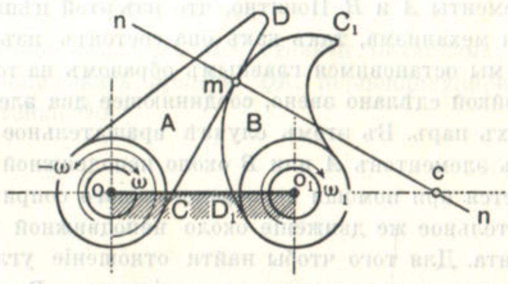
ОТДѢЛЪ 4-ый.

Зубчатая передача.

50. Отношеніе скоростей. Основаніемъ для зубчатой передачи служитъ цѣпь, состоящая изъ двухъ вращательныхъ паръ o и o_1 (фиг. 83) и одной высшей пары, которую образуютъ элементы A и B. Понятно, что изъ этой цѣпи можно получить три механизма, такъ какъ она состоитъ изъ трехъ звеньевъ; но мы остановимся главнымъ образомъ на томъ случаѣ, когда стойкой сдѣлано звено, соединяющее два элемента вращательныхъ паръ. Въ этомъ случаѣ вращательное движеніе одного изъ элементовъ A или B около неподвижной оси преобразовывается при помощи непосредственнаго соприкосновенія во вращательное же движеніе около неподвижной оси другого элемента. Для того чтобы найти отношеніе угловыхъ скоростей, будемъ сначала искать движеніе звена B относительно звена A. Для этого сообщимъ обоимъ звеньямъ вращеніе около оси o съ угловой скоростью ω, но въ сторону противоположную вращенію A. Такъ какъ такимъ образомъ звено A придетъ въ состояніе покоя, то движеніе звена B относительно его будетъ слагаться изъ двухъ вращательныхъ движеній около параллельныхъ осей и въ одну сторону. Извѣстно, что результирующее движеніе въ такомъ случаѣ будетъ также движеніе вращательное съ угловой скоростью, равною суммѣ данныхъ угловыхъ скоростей, и около оси, параллельной даннымъ и лежащей съ

фиг. 83-я.

ними въ одной плоскости; при этомъ слѣдъ этой оси на плоскости, перпендикулярной къ ней, дѣлитъ разстояніе между слѣдами данныхъ осей вращенія на части, обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ. Если звенья A и B вращаются въ одну сторону (фиг. 84), то движеніе одного изъ нихъ относительно другого опять сведется къ вращенію около оси, параллельной даннымъ и лежащей съ ними въ одной плоскости. Но въ этомъ случаѣ угловая скорость результирующаго вращенія будетъ равна разности данныхъ и слѣдъ оси результирующаго вращенія на плоскости, перпендикулярной къ осямъ, будетъ дѣлить разстояніе между слѣдами данныхъ осей внѣшнимъ образомъ на части, обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ и лежать въ сторонѣ большей угловой скорости. Такимъ образомъ, если точка c есть слѣдъ оси результирующаго вращенія, то въ обоихъ случаяхъ



фиг. 84-я.

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{oc}{o_1c}. \quad (1).$$

Но точка c есть не что иное, какъ мгновенный центръ вращенія B по отношенію къ A; если же мы обратимъ вниманіе на то, что кривыя CD и C_1D_1 находятся въ постоянномъ соприкосновеніи и являются, слѣдовательно, кривыми взаимно огибающими, то легко придемъ къ заключенію, что нормаль nn въ точкѣ соприкосновенія этихъ кривыхъ непремѣнно должна пройти черезъ точку c. Очевидно, что мы и здѣсь приходимъ къ закону Willis'а: линія дѣйствія дѣлитъ линію центровъ на части, обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ, ибо усиліе, передаваемое отъ одного изъ звеньевъ A или B къ другому, имѣетъ направленіе nn.

Изъ этого общаго случая мы можемъ получить всѣ частные случаи зубчатой передачи, къ разсмотрѣнію которыхъ мы и перейдемъ.

Отношеніе скоростей постоянно; звенья A и B вращаются въ разныя стороны. Внѣшняя цилиндрическая передача.

51. Начальныя окружности. При постоянномъ отношеніи скоростей, какъ видно изъ ур-ія (*1*) предыдущаго параграфа, точка c (фиг. 83) должна занимать постоянное положеніе на линіи центровъ. Очевидно поэтому, что геометрическое мѣсто точки c въ системѣ A будетъ окружность радіуса $oc = r$ и въ системѣ B—окружность радіуса $o_1c = r_1$, т. ч.

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Окружности эти называются начальными окружностями зубчатыхъ колесъ. Если кромѣ того задано разстояніе d между осями o и o_1, то

$$r + r_1 = d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Такимъ образомъ, при заданномъ отношеніи скоростей, задача объ опредѣленіи радіусовъ r и r_1 является вполнѣ опредѣленной.

Очевидно, что въ этомъ случаѣ движеніе приводится къ каченію одной изъ начальныхъ окружностей безъ скольженія по другой, или, такъ какъ зубчатыя колеса имѣютъ иногда довольно значительную ширину,—къ каченію одного цилиндра по другому, направляющими которыхъ являются двѣ вышеупомянутыя окружности. Если мы выполнимъ эти цилиндры въ видѣ дисковъ нѣкоторой толщины, насадимъ ихъ крѣпко на валы o и o_1 и прижмемъ съ нѣкоторымъ усиліемъ одинъ къ другому, чтобы въ мѣстѣ соприкосновенія ихъ боковыхъ поверхностей развилось достаточное треніе, то получимъ возможность передавать вращательное движеніе отъ вала o къ валу o_1 и наоборотъ. Такая передача называется фрикціонной. Въ виду многихъ практическихъ неудобствъ, фрикціонная передача примѣняется сравнительно рѣдко. Неудобство ея заключается въ томъ, что, во первыхъ, усиліе, которымъ прижимаются диски, передается подшипникамъ валовъ, гдѣ въ виду этого развивается значительное треніе; во вторыхъ, для нажатія требуются сложныя приспособленія и, въ третьихъ, она не обезпечиваетъ постоянства отношенія скоростей, ибо диски въ силу случайныхъ причинъ могутъ скользить одинъ по другому. Чтобы получить болѣе совершенную передачу, свободную отъ указанныхъ выше недостатковъ, диски снабжаютъ зубьями. Такимъ образомъ и получаются зубчатыя колеса.

Мы видѣли, какимъ условіямъ должны удовлетворять профили зубцовъ: нормаль въ точкѣ ихъ соприкосновенія должна всегда проходить черезъ точку соприкосновенія начальныхъ окружностей; отсюда вытекаютъ всѣ способы построенія профилей. Но прежде чѣмъ перейти къ болѣе детальному разсмотрѣнію всѣхъ этихъ способовъ, мы ознакомимся съ расположеніемъ зубцовъ относительно начальныхъ окружностей и выведемъ нѣсколько соотношеній, которыя весьма часто примѣняются при подсчетахъ зубчатой передачи.

52. Основныя соотношенія. Относительные размѣры зубцовъ. Пусть A и B—центры валовъ (фиг. 85), m и m_1 начальныя окружности. Обозначая радіусы начальныхъ окружностей черезъ r и r_1, соотвѣтственныя угловыя скорости черезъ ω и ω_1 и числа оборотовъ въ минуту—черезъ n и n_1, по предыдущему имѣемъ:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1} = \frac{n_1}{n} = const \; . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Если A есть ведущее колесо, то постоянная величина k называется передаточнымъ числомъ.

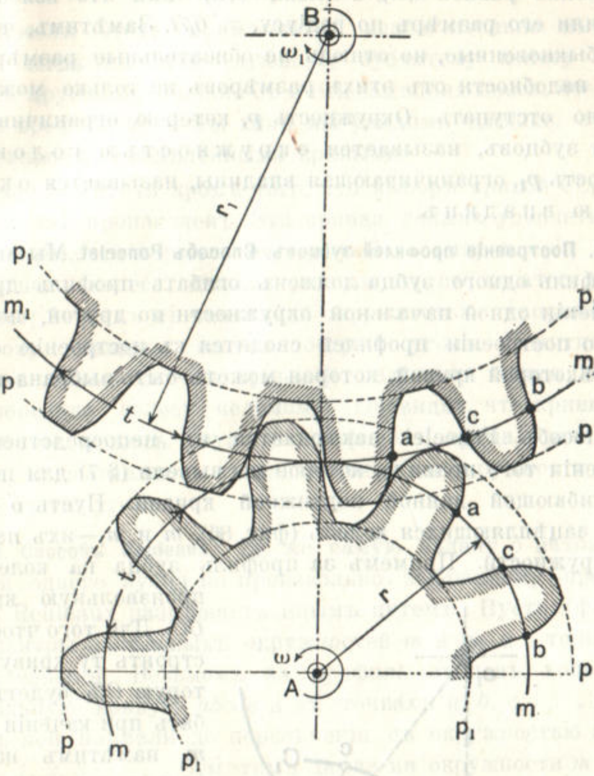
Разстояніе между двумя соотвѣтственными точками a и b двухъ смежныхъ зубцовъ одного и того же колеса, считаемое по начальной окружности, называется шагомъ зацѣпленія и обозначается обыкновенно черезъ t. Такъ какъ воображаемыя окружности m и m_1 катятся одна по другой безъ скольженія, то для правильности передачи шагъ зацѣпленія на обоихъ колесахъ долженъ быть одинаковъ. Меньшее изъ колесъ принято называть шестерней, а большее просто колесомъ. Если обозначимъ числа зубцовъ соотвѣтственно черезъ z и z_1, то легко найдемъ:

$$t = \frac{2\pi r}{z} = \frac{2\pi r_1}{z_1},$$

откуда, на основаніи ур-ія (1), имѣемъ:

$$\frac{z_1}{z} = \frac{r_1}{r} = \frac{\omega}{\omega_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

т. е. **числа зубцовъ обратно пропорціональны угловымъ скоростямъ.**



фиг. 85-я.

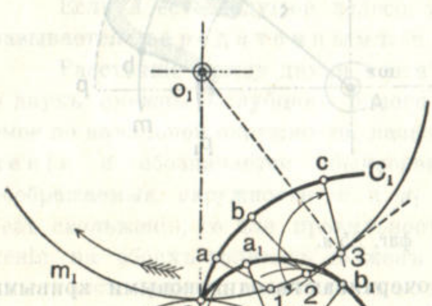
Зубцы обыкновенно очерчиваютъ одинаковыми кривыми съ обѣихъ сторонъ, чтобы имѣть возможность передавать движеніе и въ ту и другую сторону. Промежутокъ между двумя рядомъ стоящими зубцами одного и того же колеса, куда входитъ зубецъ другого колеса, называется впадиной. Ширина впадины ac по начальной окружности дѣлается обыкновенно нѣсколько больше толщины зубца cb:

$$cb = \frac{19}{40}\, t \quad \text{и} \quad ac = \frac{21}{40}\, t.$$

Часть зубца, лежащая внѣ начальной окружности, называется головкою, а та часть, которая лежитъ внутри начальной окружности,—ножкою. Высота головки дѣлается обыкновенно равной *0,3t*, а ножки—*0,4t*, такъ что вся высота зубца, или его размѣръ по радіусу, $= 0{,}7t$. Замѣтимъ, что это лишь обыкновенные, но отнюдь не обязательные размѣры; въ случаѣ надобности отъ этихъ размѣровъ не только можно, но и должно отступать. Окружность p, которою ограничиваются головки зубцовъ, называется окружностью головокъ; окружность p_1, ограничивающая впадины, называется окружностью впадинъ.

53. Построеніе профилей зубцовъ. Способъ Poncelet. Мы видѣли, что профиль одного зубца долженъ огибать профиль другого при каченіи одной начальной окружности по другой, поэтому задача о построеніи профилей сводится къ построенію огибающей нѣкоторой кривой, которая можетъ быть выбрана произвольно.

Способъ Poncelet заключается въ непосредственномъ примѣненіи того правила, которое мы вывели (§ 7) для построенія огибающей данной подвижной кривой. Пусть o и o_1— центры зацѣпляющихся колесъ (фиг. 86), m и m_1—ихъ начальныя окружности. Примемъ за профиль зубца на колесѣ m_1 произвольную кривую CC_1. Для того чтобы построить ту кривую, которую CC_1 будетъ огибать при каченіи m_1 по m, намѣтимъ на ней нѣсколько произвольныхъ точекъ a, b, c и т. д. и проведемъ въ этихъ точкахъ къ ней нормали $a1$, $b2$ и $c3$ до пересѣченія съ окружностью m_1; затѣмъ отмѣтимъ на окружности m точки $1'$, $2'$ и $3'$ такъ, чтобы $\smile{C1'} = \smile{C1}$, $\smile{1'2'} = \smile{12}$ и $\smile{2'3'} = \smile{23}$,



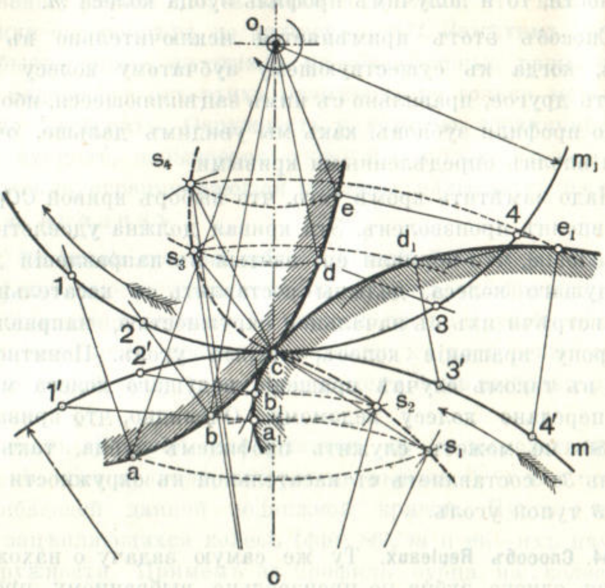
фиг. 86-я.

и опишемъ изъ этихъ точекъ, какъ изъ центровъ, соотвѣтственно окружности радіусами $1'a_1 = 1a$, $2'b_1 = 2b$ и $3'c = 3c$. Если мы проведемъ кривую CC_2, огибающую эти элементарныя окружности, то и получимъ профиль зубца колеса m.

Способъ этотъ примѣняется исключительно въ томъ случаѣ, когда къ существующему зубчатому колесу нужно устроить другое, правильно съ нимъ зацѣпляющееся, ибо обыкновенно профили зубцовъ, какъ мы увидимъ дальше, очерчиваются вполнѣ опредѣленными кривыми.

Надо замѣтить кромѣ того, что выборъ кривой CC_1 (фиг. 86) не вполнѣ произволенъ. Эта кривая должна удовлетворять тому условію, что нормали ея, взятыя въ направленіи давленія ведущаго колеса, должны составлять съ касательной въ точкѣ встрѣчи ихъ съ начальной окружностью, направленной въ сторону вращенія колесъ, острый уголъ. Понятно, что только въ такомъ случаѣ вращеніе ведущаго колеса можетъ быть передано колесу ведомому. Очевидно, что кривая CC_1 (фиг. 86) не можетъ служить профилемъ зубца, такъ какъ нормаль $3c$ составляетъ съ касательной къ окружности m_1 въ точкѣ 3 тупой уголъ.

54. Способъ Reuleaux. Ту же самую задачу о нахожденіи профиля одного зубца по произвольно выбранному профилю другого Reuleaux разрѣшаетъ инымъ путемъ. Пусть (фиг. 87) o и o_1 центры начальныхъ окружностей m и m_1 и c точка ихъ соприкосновенія. Возьмемъ за профиль зубцовъ колеса m_1 произвольную кривую $abcde$ и въ точкахъ $a, b, c, \ldots$ проведемъ къ ней нормали до пересѣченія съ окружностью m_1 въ точкахъ $1, 2, 3 \ldots$ Отмѣтимъ далѣе на окружности m точки $1', 2', 3' \ldots$ такимъ образомъ, чтобы $\smile{12} = \smile{1'2'}$, $\smile{2c} = \smile{2'c}$ и т. д. Когда начальныя окружности соприкоснутся точками 1 и $1'$, т. е. когда эти двѣ послѣднія точки придутъ на линію центровъ и займутъ положеніе точки c, точка a придетъ въ соприкосновеніе съ соотвѣтствующей ей точкой искомаго профиля зубца колеса m. Это ясно изъ того, что нормаль въ точкѣ соприкосновенія огибающихъ проходитъ всегда черезъ мгновенный центръ. Точка плоскости s_1, въ которую придутъ въ данный моментъ эти обѣ точки, лежитъ на пересѣченіи двухъ окружностей: окружности, описанной изъ c радіусомъ $= 1a$, и окружности, описанной изъ o_1 радіусомъ o_1a. Такимъ же образомъ мы можемъ построить цѣлый рядъ точекъ s_2, s_3 . . . , соотвѣтствующихъ точкамъ b, d . . . . Замѣтимъ, что мы получимъ



фиг. 87-я.

собственно двойной рядъ точекъ s, такъ какъ упомянутыя окружности будутъ пересѣкаться въ двухъ точкахъ; но во всякомъ частномъ случаѣ легко разобраться, который рядъ точекъ мы должны принять во вниманіе, чтобы выполнилось условіе, которому должны удовлетворять профили зубцовъ (§ 53). Разъ мы имѣемъ рядъ точекъ s_1, s_2 . . . , легко построить точки профиля колеса m. Понятно, что онѣ лежатъ соотвѣтственно на пересѣченіи окружностей, описанныхъ изъ точекъ $1'$, $2'$ . . . , радіусами $= 1a$, $2b$ . . . и окружностей, описанныхъ изъ o, радіусами os_1, os_2 . . .

Способъ Reuleaux имѣетъ то преимущество передъ способомъ Poncelet, что даетъ возможность опредѣлить цѣлый рядъ точекъ s_1, s_2, s_3 . . . на плоскости, въ которыя приходятъ въ моментъ соприкосновенія соотвѣтственныя точки профилей зубцовъ. Если мы соединимъ всѣ эти точки s, то получимъ кривую, называемую **кривой зацѣпленія**. Съ ней связаны нѣкоторыя положенія, весьма важныя для теоріи зацѣпленія. Эта кривая характеризуетъ зацѣпленіе и даетъ возможность сравнивать пригодность различныхъ кривыхъ для этой цѣли. Дѣйствительно, если мы соединимъ точки s съ точкой c прямыми, то эти прямыя дадутъ намъ направленіе давленія ведущаго зубца на ведомый. Очевидно, что только составляющая давленія по касательной къ начальнымъ окружностямъ въ точкѣ c идетъ на преодолѣніе полезныхъ сопротивленій; слагающая же по общей нормали, т. е. по линіи центровъ, увеличиваетъ вредныя сопротивленія. Поэтому понятно, что зацѣпленіе тѣмъ совершеннѣй, чѣмъ меньше общія нормали къ кривымъ профилей зубцовъ въ точкахъ касанія отклоняются отъ направленія касательной къ начальнымъ окружностямъ въ точкѣ c.

Кромѣ направленія нормалей, надо принимать во вниманіе и длину ихъ. Мы видѣли выше, что скорость скольженія двухъ взаимно огибающихъ кривыхъ одной по другой выражается такъ (§ 15):

$$v = n.u \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ n есть длина общей нормали къ кривымъ въ точкѣ ихъ соприкосновенія, u — скорость перемѣщенія мгновеннаго центра по полоидѣ (въ данномъ случаѣ это есть общая скорость по начальнымъ окружностямъ), r и r_1 — радіусы кривизны полоиды и серполоиды (въ данномъ случаѣ радіусы начальныхъ окружностей). Отсюда мы и видимъ, что чѣмъ больше n, тѣмъ, при прочихъ равныхъ условіяхъ, больше v и, слѣдовательно, работа тренія. Въ силу этого желательно, съ одной стороны, чтобы линія зацѣпленія, разъ она должна имѣть опредѣленную длину, располагалась бы по обѣ стороны линіи центровъ; съ другой стороны, чтобы она была возможно короче. Но въ послѣднемъ отношеніи нельзя итти далѣе нѣкотораго предѣла, который опредѣляется изъ слѣдующихъ соображеній. Для правильной передачи движенія необходимо, чтобы прежде чѣмъ одна пара зубцовъ выходила изъ зацѣпленія, другая пара входила бы въ зацѣпленіе; слѣдовательно, требуется, чтобы, пока точка зацѣпленія (s) проходитъ кривую зацѣпленія, общая точка соприкосновенія начальныхъ окружностей прошла бы дугу, большую одного шага. Эта дуга называется дугою зацѣпленiя. Если l есть длина кривой зацѣпленiя, w—скорость по ней точки зацѣпленiя, то длина d дуги зацѣпленiя опредѣлится такимъ образомъ:

$$\frac{l}{w} = \frac{d}{u} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Откуда

$$d = \frac{u.l}{w} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

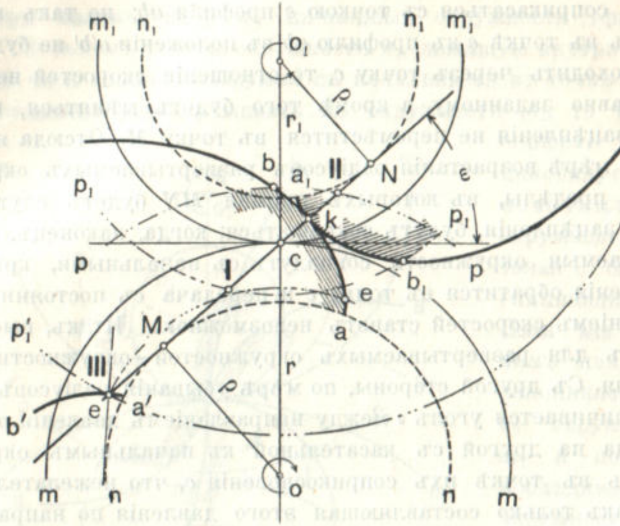
причемъ

$$d \text{ должно быть} > t \quad . \ . \ . \ . \ . \ (4).$$

55. Зацѣпленiе по развертывающей окружности. При проектированiи новыхъ колесъ пользуются нѣсколькими способами очерчиванiя профилей зубцовъ; но чаще всего зубцы очерчиваютъ по развертывающей окружности. Мы видѣли раньше (§ 6), что при каченiи окружности m_1 по m, (фиг. 88) развертка круга n_1, концентрическаго съ m_1, будетъ огибать развертку круга n, концентрическаго съ m, причемъ имѣетъ мѣсто соотношенiе:

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{r_1}{r} = \frac{\rho_1}{\rho} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1).$$

Развертки ab и a_1b_1 строятся по точкамъ. Для обсужденiя достоинства этого зацѣпленiя воспользуемся методомъ Reuleaux. Кривая зацѣпленiя здѣсь представится прямою MN, касательною къ развертываемымъ окружностямъ и проходящею черезъ точку c. Для доказательства этого вспомнимъ, что нормаль въ точкѣ соприкосновенiя зубцовъ должна проходить всегда черезъ точку соприкосновенiя начальныхъ окружностей. Такъ какъ по свойству развертки нормаль къ ней въ любой точкѣ всегда касается въ соотвѣтствующей точкѣ развертываемой окружности, то, очевидно, что нормаль въ точкѣ соприкосновенiя зубцовъ должна всегда совпадать съ прямой MN, или съ прямой ей симметричной по отношенiю къ линiи центровъ oo_1, причемъ эта послѣдняя будетъ служить кривой зацѣпленiя при вращенiи колесъ въ обратную сторону. Предѣлы, въ которыхъ прямая MN служитъ кривой зацѣпленiя, опредѣляются точками пересѣченія ея съ окружностями головокъ колесъ p и p_1. Въ точкѣ I крайняя точка головки зубца колеса m_1 будетъ соприкасаться съ соотвѣтствующей ей точкою профиля



фиг. 88-я.

ab, которую легко найти построеніемъ Reuleaux, а въ точкѣ II крайняя точка головки зубца колеса m съ соотвѣтствующей ей точкою профиля a_1b_1. Если мы знаемъ длину $I\,II = l$, то легко опредѣлить число зубцовъ, находящихся постоянно въ зацѣпленіи. По формулѣ (3) предыдущаго параграфа это число равняется цѣлому частнаго:

$$\frac{d}{t} = \frac{l.u}{w.t}.$$

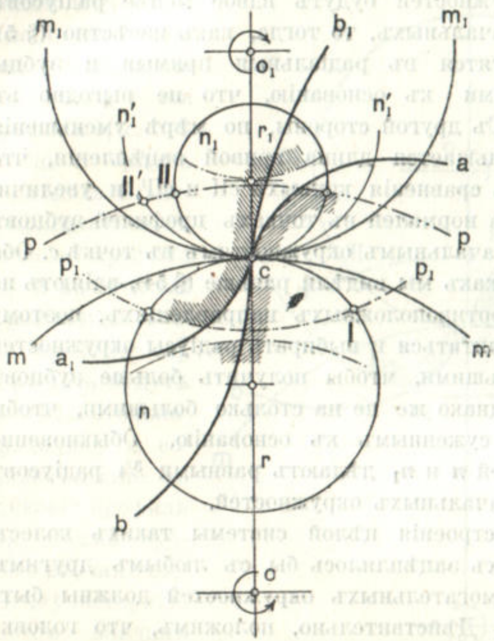
Если l извѣстно, то остается найти только отношеніе $\frac{u}{w}$, которое очевидно $= cos\varepsilon$, т. к. $w = u.cos\varepsilon$, т. е. скорости по окружностямъ n и n_1. При построеніи этого зацѣпленія радіусъ одной изъ окружностей n или n_1 можетъ быть выбранъ произвольно; однако же здѣсь должны быть приняты во вниманіе нѣкоторыя ограниченія. Замѣтимъ прежде всего, что точки I и II не могутъ лежать за предѣлами M и N.

Допустимъ, что мы придали зубцу колеса m_1 такую высоту, что окружность его головки пересѣчетъ прямую MN въ точкѣ III. На основаніи построенія Reuleaux мы легко найдемъ, что въ этой точкѣ крайняя точка головки зубца колеса m_1 будетъ соприкасаться съ точкою e профиля ab; но такъ какъ нормаль въ точкѣ e къ профилю ab въ положеніи $a'b'$ не будетъ уже проходить черезъ точку c, то отношеніе скоростей не будетъ равно заданному, а кромѣ того будетъ мѣняться, пока точка зацѣпленія не перемѣстится въ точку M. Отсюда ясно, что, по мѣрѣ возрастанія радіусовъ развертываемыхъ окружностей, предѣлы, въ которыхъ прямая MN будетъ служить кривой зацѣпленія, будутъ сокращаться; когда, наконецъ, развертываемыя окружности совпадутъ съ начальными, кривая зацѣпленія обратится въ точку c и передача съ постояннымъ отношеніемъ скоростей станетъ невозможною. Итакъ, высшій предѣлъ для развертываемыхъ окружностей—окружности начальныя. Съ другой стороны, по мѣрѣ убыванія радіусовъ ρ и ρ_1, увеличивается уголъ ε между направленіемъ давленія одного зубца на другой съ касательной къ начальнымъ окружностямъ въ точкѣ ихъ соприкосновенія c, что нежелательно, такъ какъ только составляющая этого давленія по направленію касательной совершаетъ полезную работу, а составляющая по линіи центровъ увеличиваетъ лишь вредныя сопротивленія. Изъ всего предыдущаго можно сдѣлать такой выводъ: уголъ ε нужно брать возможно малымъ, но достаточнымъ, чтобы получить желательное число зубцовъ въ зацѣпленіи.

Отмѣтимъ нѣкоторыя хорошія свойства разсматриваемаго зацѣпленія. На основаніи соотношенія *(1)* мы можемъ легко заключить, что при очерчиваніи профилей по развертывающимъ окружности неточная установка разстоянія между осями колесъ не имѣетъ вліянія на измѣненіе отношенія скоростей, такъ какъ это отношеніе равно отношенію радіусовъ развертываемыхъ окружностей. Правильность передачи не нарушается и въ томъ случаѣ, если зубцы снашиваются по всей поверхности равномѣрно, ибо кривая, параллельная разверткѣ, есть развертка того же круга. Зацѣпленіе по развертывающимъ окружности даетъ возможность устройства безъ всякихъ затрудненій и неудобствъ цѣлой системы колесъ, каждое изъ которыхъ будетъ правильно зацѣпляться съ каждымъ другимъ. Для этого, очевидно, нужно выбирать для всѣхъ колесъ одинъ и тотъ же уголъ ε.

56. Эпициклическое зацѣпленіе. Построеніе эпициклическаго зацѣпленія основано на теоремѣ Камуса (§ 8). Пусть o и o_1 центры валовъ, m и m_1 — начальныя окружности (фиг. 89).

Возьмемъ третью окружность n_1, лежащую внутри окружности m_1 и соприкасающуюся съ начальными въ точкѣ c. Если мы покатимъ эту окружность по окружности m_1, то точка c опишетъ гипоциклоиду cb_1, если покатимъ ее по окружности m, то точка c опишетъ эпициклоиду ca. Если мы соединимъ неизмѣнно гипоциклоиду cb_1 съ окружностью m_1 и покатимъ послѣднюю по окружности m, то cb_1 будетъ огибать ca, т. ч. эти кривыя могутъ служить профилями зубцовъ. Въ виду того, что кривая cb_1 находится внутри окружности m_1, а кривая ca снаружи окружности m, то этими кривыми можно очертить только ножку зубцовъ колеса m_1 и головку зубцовъ колеса m. Если мы возьмемъ вторую подобную же окружность n, но расположенную внутри окружности m, то при помощи ея такимъ же образомъ получимъ профиль cb (гипоциклоида) ножки колеса m и профиль ca_1 (эпициклоида) головки колеса m_1.



Фиг. 89-я.

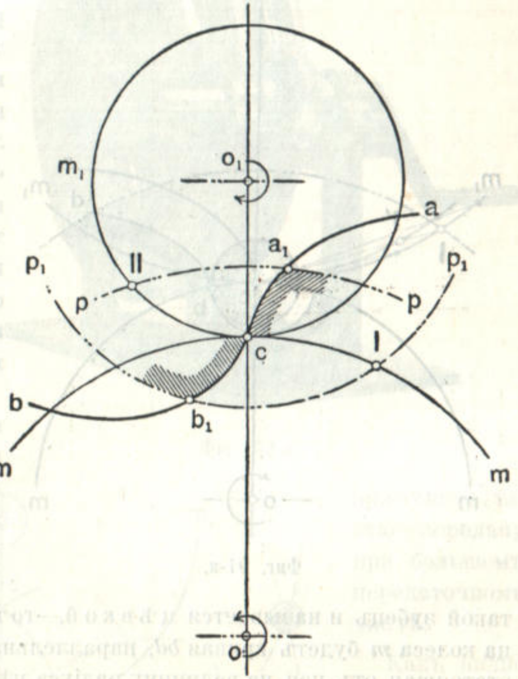
Кривая зацѣпленія будетъ, очевидно, составляться изъ дугъ вспомогательныхъ окружностей IIc и cI, такъ какъ образующія профили зубцовъ точки находятся на этихъ окружностяхъ, причемъ точки *I* и *II* получаются пересѣченіемъ окружностей n и n_1 съ окружностями головокъ зубцовъ p и p_1. Въ виду того, что вспомогательныя окружности катятся по начальнымъ съ тою же скоростью, съ которою послѣднія катятся другъ по другу, въ данномъ случаѣ длина кривой зацѣпленія равна длинѣ дуги зацѣпленія.

Выборъ радіусовъ вспомогательныхъ окружностей n и n_1 производится на основаніи слѣдующихъ соображеній. Если радіусы этихъ окружностей будутъ вдвое менѣе радіусовъ соотвѣтственныхъ начальныхъ, то тогда, какъ извѣстно (§ 5), гипоциклоиды обратятся въ радіальныя прямыя и зубцы получатся суженными къ основанію, что не выгодно въ смыслѣ прочности. Съ другой стороны, по мѣрѣ уменьшенія ихъ радіусовъ, уменьшается длина кривой зацѣпленія, что легко заключить изъ сравненія кривыхъ cII и cII', и увеличиваются углы наклона нормалей въ точкахъ профилей зубцовъ съ касательной къ начальнымъ окружностямъ въ точкѣ c. Оба эти обстоятельства, какъ мы видѣли раньше (§ 54), вліяютъ на работу тренія въ противоположныхъ направленіяхъ, поэтому съ ними можно не считаться и выбирать радіусы окружностей n и n_1 возможно большими, чтобы получить больше зубцовъ въ зацѣпленіи; но однако же не на столько большими, чтобы зубецъ получался суженнымъ къ основанію. Обыкновенно діаметры окружностей n и n_1 дѣлаютъ равными $^3/_4$ радіусовъ соотвѣтственныхъ начальныхъ окружностей.

Въ случаѣ построенія цѣлой системы такихъ колесъ, каждое изъ которыхъ зацѣплялось бы съ любымъ другимъ, радіусы всѣхъ вспомогательныхъ окружностей должны быть равны между собою. Дѣйствительно, положимъ, что головки какого нибудь третьяго колеса m_2 очерчены по эпициклоидамъ, образованнымъ при помощи окружности n (фиг. 89), а впадины по гипоциклоидамъ, образованнымъ при помощи окружности n_1; тогда такое колесо могло бы правильно зацѣпляться съ колесомъ m, но не могло бы зацѣпляться съ колесомъ m_1. Это обстоятельство является, очевидно, недостаткомъ эпициклическаго зацѣпленія, такъ какъ лишаетъ возможности выбрать для каждаго колеса болѣе цѣлесообразныя размѣры вспомогательной окружности.

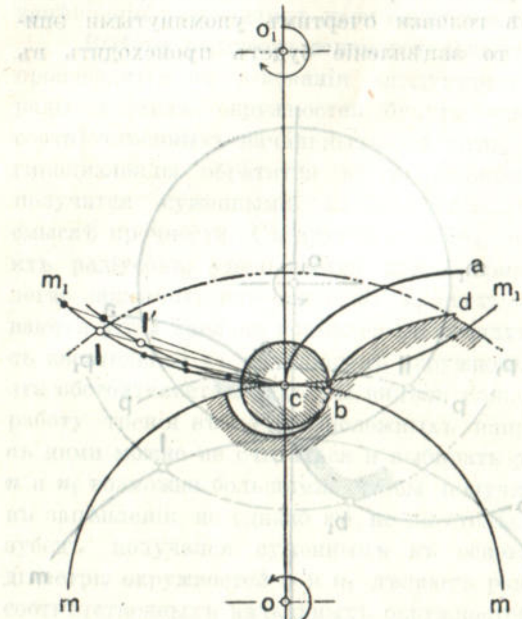
57. Зацѣпленіе по двумъ точкамъ. Это зацѣпленіе представляетъ собою частный случай предыдущаго. Положимъ, что мы выбираемъ за профиль зубца колеса m_1 (фиг. 90) точку c; тогда профилемъ головки колеса m будетъ эпициклоида ca, описываемая точкой c при каченіи m_1 по m. Если мы обратно примемъ точку c за профиль зубцовъ колеса m, то головка зубца на колесѣ m_1 будетъ очерчена по эпициклоидѣ cb.

Если же мы обѣ головки очертимъ упомянутыми эпициклоидами ca и cb, то зацѣпленіе будетъ происходить въ слѣдующемъ порядкѣ: отъ точки I до точки c кривой зацѣпленія различныя точки профиля b_1c, отъ b_1 до c, будутъ послѣдовательно соприкасаться съ точкою c профиля ca_1, а на пути cII —различныя точки профиля ca_1, отъ c до a_1, будутъ послѣдовательно приходить въ соприкосновеніе съ точкою c профиля cb_1. Ножка зубцовъ въ зацѣпленіи не участвуетъ, поэтому впадинѣ можетъ быть придана произвольная форма, лишь бы только одинъ зубецъ не задѣвалъ за другой. Недостатокъ этой передачи заключается въ быстромъ изнашиваніи зубцовъ около точки c; но зато съ другой стороны здѣсь получается длинная кривая зацѣпленія, поэтому такое зацѣпленіе съ успѣхомъ примѣняется въ періодически дѣйствующихъ передачахъ, гдѣ при малыхъ размѣрахъ одного изъ колесъ желательно получить возможно большое число зубцовъ въ зацѣпленіи.



Фиг. 90-я.

58. Цѣвочное зацѣпленіе. Построеніе цѣвочнаго зацѣпленія основано на свойствѣ параллельныхъ кривыхъ (§ 9). Положимъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, что за профиль зубца колеса m_1 (фиг. 91) мы принимаемъ точку c; тогда, очевидно, профиль головки зубца колеса m долженъ быть очерченъ по эпициклоидѣ ca, которая будетъ описана точкою c при каченіи окружности m_1 по m. Кривою зацѣпленія будетъ дуга окружности m_1 въ предѣлахъ отъ c до точки I, гдѣ она пересѣкается съ окружностью головокъ зубцовъ колеса m.

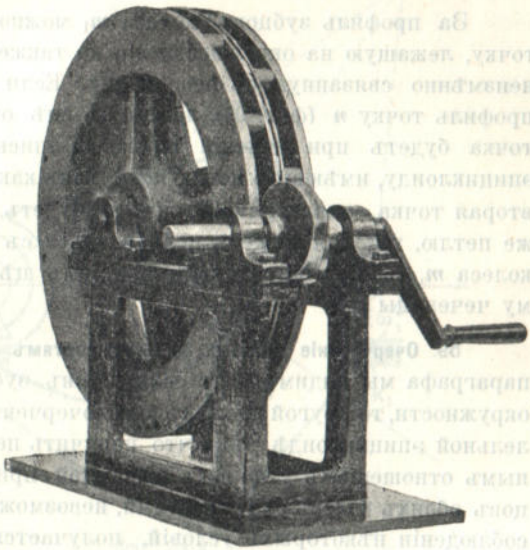


Фиг. 91-я.

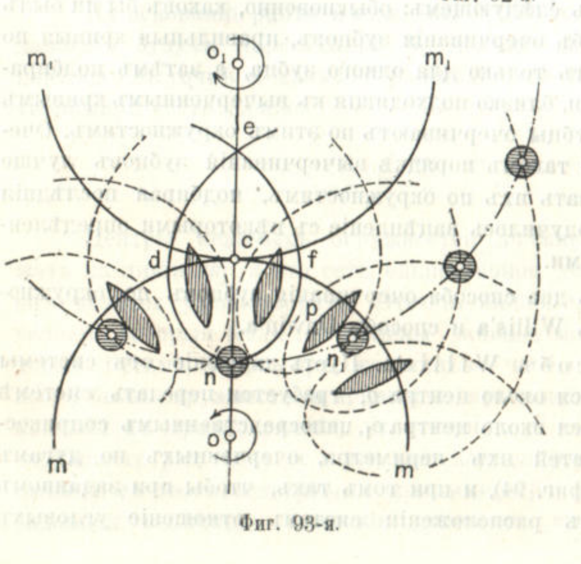
Если вмѣсто точки мы возьмемъ за профиль зубцовъ колеса m_1 окружность, описанную изъ точки c небольшимъ радіусомъ,—такой зубецъ и называется ц ѣ в к о й,—то тогда профилемъ зубца колеса m будетъ кривая bd, параллельная эпициклоидѣ ca и отстоящая отъ нея на величину радіуса цѣвки. Форма впадины зубца колеса m совершенно произвольна, обыкновенно ее очерчиваютъ полуокружностью, радіуса немного большаго радіуса цѣвки. Кривая зацѣпленія, очевидно, измѣнитъ свой видъ; чтобы получить ее, проведемъ черезъ точку c рядъ прямыхъ до встрѣчи съ окружностью m_1 и будемъ откладывать на нихъ отъ окружности m_1 длины II' и т. д., равныя радіусу цѣвки. Соединивъ полученныя такимъ образомъ точки, мы и найдемъ кривую зацѣпленія.

Цѣвочное зацѣпленіе не можетъ давать хорошихъ результатовъ въ виду того, что кривая зацѣпленія располагается по одну сторону линіи центровъ; однако же оно обладаетъ и нѣкоторымъ преимуществомъ передъ другими зацѣпленіями, которое заключается въ простотѣ формы зубцовъ, что и является причиной распространенія цѣвочнаго зацѣпленія въ примитивныхъ устройствахъ (вѣтряныхъ и водяныхъ мельницахъ), гдѣ цѣвки выполняются изъ круглыхъ дубовыхъ палочекъ.

Имѣя въ виду указанную простоту формы и значительную длину кривой зацѣпленія, Грисонъ предложилъ примѣнять такую передачу при большомъ передаточномъ числѣ.



Фиг. 92-я.



Фиг. 93-я.

Какъ видно изъ прилагаемой фигуры (фиг. 92), въ передачѣ Грисона малое колесо имѣетъ только одинъ сердцевидной формы зубецъ. Такъ какъ, очевидно, при одномъ зубцѣ передача не можетъ происходить непрерывно, здѣсь въ одно цѣлое соединены двѣ пары колесъ, причемъ зубцы ихъ смѣщены относительно другъ друга по окружности на половину шага.

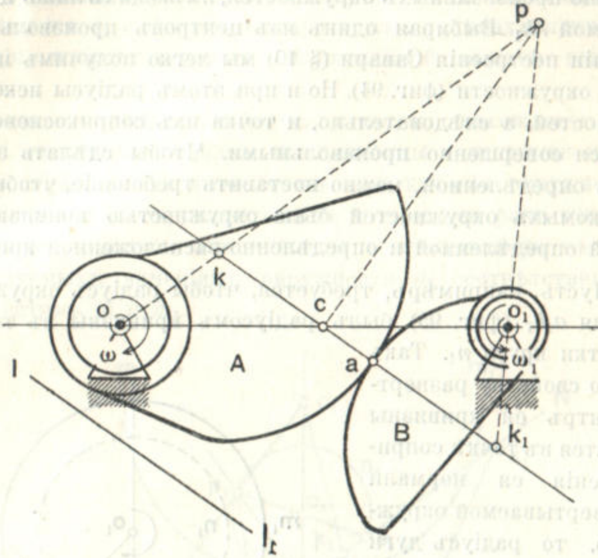
За профиль зубцовъ колеса m_1 можно взять не только точку, лежащую на окружности m_1, но также и всякую другую, неизмѣнно связанную съ нею точку. Если мы возьмемъ за профиль точку n (фиг. 93), лежащую внѣ окружности, то эта точка будетъ при каченiи m_1 по m описывать удлиненную эпициклоиду, имѣющую петлю $ndef$. Такъ какъ сосѣднiй зубецъ, вторая точка, аналогичная точкѣ n, будетъ описывать такую же петлю, которая можетъ пересѣкаться съ первою, то зубцы колеса m, если вмѣсто точекъ возьмемъ цѣвки, примутъ форму чечевицы p.

59. Очерчиванiе зубцовъ по окружностямъ. Изъ предыдущаго параграфа мы видимъ, что если одинъ зубецъ очерченъ по окружности, то другой долженъ быть очерченъ по кривой, параллельной эпициклоидѣ, такъ что получить передачу съ постояннымъ отношенiемъ угловыхъ скоростей при очерчиванiи зубцовъ обоихъ колесъ окружностями, невозможно. Однако же, при соблюденiи нѣкоторыхъ условiй, получается достаточная для практическихъ цѣлей точность. Смыслъ такого зацѣпленiя заключается въ слѣдующемъ: обыкновенно, каковъ бы ни былъ выбранъ способъ очерчиванiя зубцовъ, правильныя кривыя по точкамъ строятъ только для одного зубца, а затѣмъ подбираютъ окружности, близко подходящiя къ вычерченнымъ кривымъ и остальные зубцы очерчиваютъ по этимъ окружностямъ. Очевидно, что при такомъ порядкѣ вычерчиванiя зубцовъ лучше сразу очерчивать ихъ по окружностямъ, подбирая послѣднiя такъ, чтобы получилось зацѣпленiе съ нѣкоторыми опредѣленными свойствами.

Опишемъ два способа очерчиванiя зубцовъ по окружностямъ: способъ Willis'а и способъ Unwin'а.

1) Способъ Willis'а. Пусть движенiе отъ системы A, вращающейся около центра o, требуется передать системѣ B, вращающейся около центра o_1, непосредственнымъ соприкосновенiемъ частей ихъ периметра, очерченныхъ по дугамъ окружностей (фиг. 94), и при томъ такъ, чтобы при заданномъ относительномъ расположенiи системъ отношенiе угловыхъ

скоростей ихъ было равно нѣкоторому заданному числу и давленіе ведущей системы на ведомую имѣло направленіе ll_1.



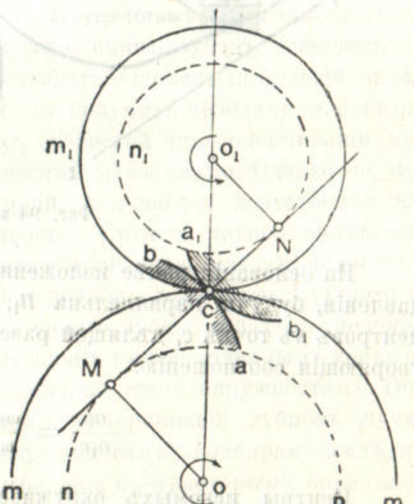
Фиг. 94-я.

На основаніи ранѣе изложеннаго (§ 50) понятно, что линія давленія, будучи параллельна ll_1, должна пересѣкать линію центровъ въ точкѣ c, дѣлящей разстояніе oo_1 на части, удовлетворяющія соотношенію:

$$\frac{oc}{o_1c} = \frac{\omega_1}{\omega}.$$

Центры искомыхъ окружностей должны, очевидно, лежать на линіи kk_1 и это есть единственное условіе, которому онѣ должны удовлетворять. Отсюда видно, что кромѣ тѣхъ условій, которыя были поставлены раньше, можно ввести еще новыя. Весьма, напримѣръ, желательно, чтобы искомыя окружности были окружностями кривизны пары взаимно огибающихъ кривыхъ въ предположеніи, что полоида и серполоида суть окружности радіусовъ oc и o_1c; такъ какъ окружности кривизны имѣютъ съ соотвѣтственными кривыми три общія точки, то заданная величина отношенія угловыхъ скоростей будетъ имѣть мѣсто въ теченіе двухъ безконечно малыхъ промежутковъ времени, а не одного, какъ это было бы въ случаѣ совершенно произвольныхъ окружностей, имѣющихъ лишь центры на прямой kk_1. Выбирая одинъ изъ центровъ произвольно, на основаніи построенія Савари (§ 10) мы легко получимъ центръ второй окружности (фиг. 94). Но и при этомъ радіусы искомыхъ окружностей, а слѣдовательно, и точка ихъ соприкосновенія a, остаются совершенно произвольными. Чтобы сдѣлать задачу вполнѣ опредѣленной, можно поставить требованіе, чтобы одна изъ искомыхъ окружностей была окружностью кривизны нѣкоторой опредѣленной и опредѣленно-расположенной кривой.

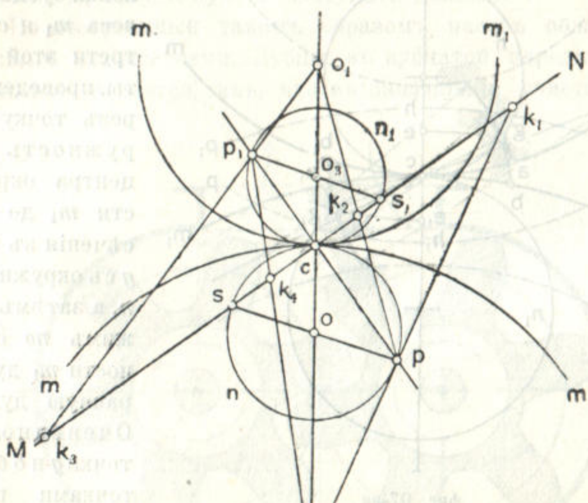
Пусть, напримѣръ, требуется, чтобы радіусъ окружности профиля a_1b_1 (фиг. 95) былъ радіусомъ кривизны въ точкѣ c развертки круга n_1. Такъ какъ по свойству развертки центръ ея кривизны находится въ точкѣ соприкосновенія ея нормали съ развертываемой окружностью, то радіусъ дуги a_1b_1 будетъ cN и центръ ея — N. Очевидно, что радіусъ профиля ab зубца колеса m будетъ Mc, а центръ — точка M. Построенное такимъ образомъ зацѣпленіе будетъ съ достаточною точностью удовлетворять условію постоянства скоростей и по своимъ свойствамъ близко подходить къ зацѣпленію по развертывающимъ окружности.



фиг. 95-ая.

Можно также построить зацѣпленіе по окружностямъ, близкое по свойствамъ къ эпициклическому, построенному при помощи вспомогательныхъ окружностей n и n_1 (фиг. 96). Поставимъ условіе, чтобы зацѣпленіе было точно въ двухъ точкахъ s и s_1, лежащихъ на одной прямой MN, проходящей черезъ точку соприкосновенія начальныхъ окружностей. Очевидно, что въ моментъ зацѣпленія въ точкахъ s и s_1 давленіе одного зубца на другой будетъ направлено по MN. Замѣтимъ, что точки s и s_1 слѣдуетъ выбирать въ предѣлахъ кривой зацѣпленія, соотвѣтствующей желательной высотѣ головокъ зубцовъ.

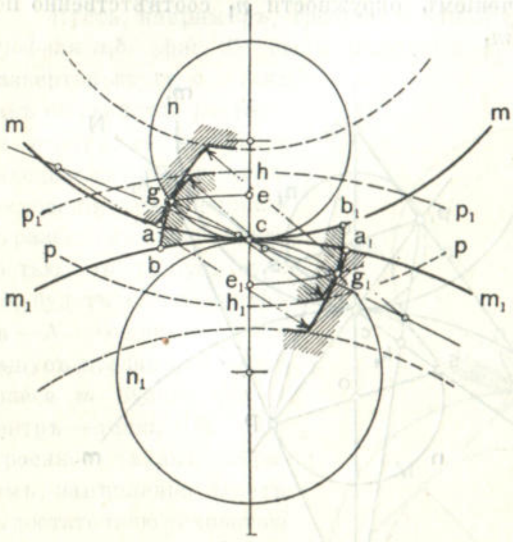
Задача, слѣдовательно, сводится къ нахожденію радіусовъ и центровъ кривизны эпициклоиды и гипоциклоиды въ точкѣ s, образуемыхъ этою точкою при каченіи окружности n соотвѣтственно по окружностямъ m_1 и m, и центровъ кривизны и радіусовъ кривизны эпициклоиды и гипоциклоиды въ точкѣ s_1, образуемыхъ каченіемъ окружности n_1 соотвѣтственно по окружностямъ m и m_1.



фиг. 96-ая.

Всѣ искомые центры кривизны располагаются, очевидно, на прямой MN и находятся весьма просто построеніемъ Савари (§ 10). Такъ, напримѣръ, для нахожденія центра кривизны k_1 гипоциклоиды въ точкѣ s, ведемъ прямую sp черезъ центръ окружности n (центръ кривизны серполоиды) до встрѣчи съ перпендикуляромъ изъ точки c (полюсъ) къ прямой MN (нормаль въ точкѣ соприкосновенія огибающихъ), а затѣмъ ведемъ прямую черезъ o (центръ кривизны полоиды) и p, которая и пересѣчетъ прямую MN въ искомомъ центрѣ кривизны k_1. Подобнымъ же образомъ находятся и остальныя центры кривизны k_2, k_3 и k_4.

2) Способъ Unwin'a. Способъ Unwin'a для замѣны профилей зубцовъ окружностями въ эпициклическомъ зацѣпленіи состоитъ въ слѣдующемъ. Пусть m и m_1 (фиг. 97) начальныя, а n и n_1 вспомогательныя окружности. Предполагая, что ch есть полная высота головки зубцовъ колеса m_1 и ce двѣ трети этой высоты, проведемъ черезъ точку e окружность изъ центра окружности m_1 до пересѣченія въ точкѣ g съ окружностью n, а затѣмъ отложимъ по окружности m_1 дугу cb, равную дугѣ cg. Очевидно, что точки g и b будутъ точками профиля головки зубцовъ колеса m_1. Если мы теперь найдемъ попытками на прямой gc,—которая, очевидно, будетъ нормалью къ точному профилю въ точкѣ g,—или на ея продолженіи, центръ окружности, которая проходила бы черезъ точки g и b, то можемъ этой окружностью очертить профиль головки колеса m_1. Профиль ножки колеса m можетъ быть очерченъ, очевидно, по окружности, проходящей черезъ точки g и a, если $\smile{ca} = \smile{cg}$, изъ нѣкотораго центра на прямой cg. Подобнымъ же образомъ можно очертить профиль головки колеса m и профиль ножки колеса m_1.

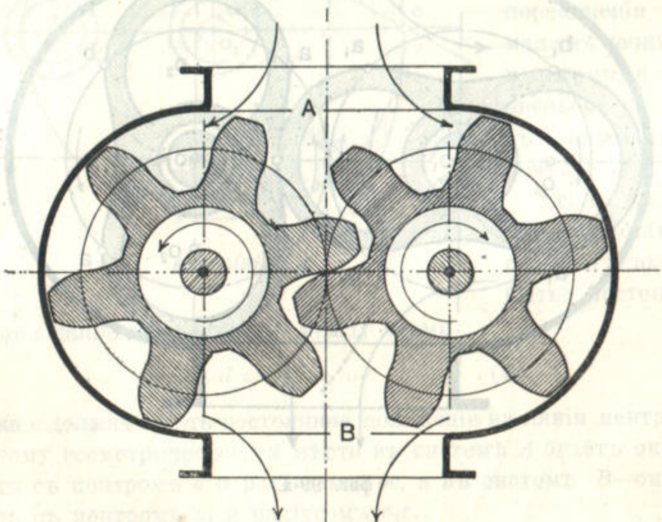


фиг. 97-ая.

60. Коловратные насосы. Механизмъ коловратныхъ насосовъ есть частный случай разсмотрѣнной нами внѣшней цилиндрической передачи.

Коловратный насосъ можетъ быть образованъ при помощи двухъ равныхъ зубчатыхъ колесъ съ зубцами, построенными при помощи одного изъ описанныхъ способовъ. Если мы помѣстимъ пару такихъ колесъ въ плотно облегающій ихъ кожухъ (фиг. 98), то внутри кожуха образуются два отдѣленныхъ другъ отъ друга пространства *A* и *B*, такъ какъ по крайней мѣрѣ одна пара зубцовъ всегда будетъ находиться между собою въ соприкосновеніи. При вращеніи колесъ по стрѣлкамъ жидкость изъ пространства *A* будетъ захватываться въ промежутки между зубцами и кожухомъ и перемѣщаться въ пространство *B*, откуда будетъ поступать дальше.

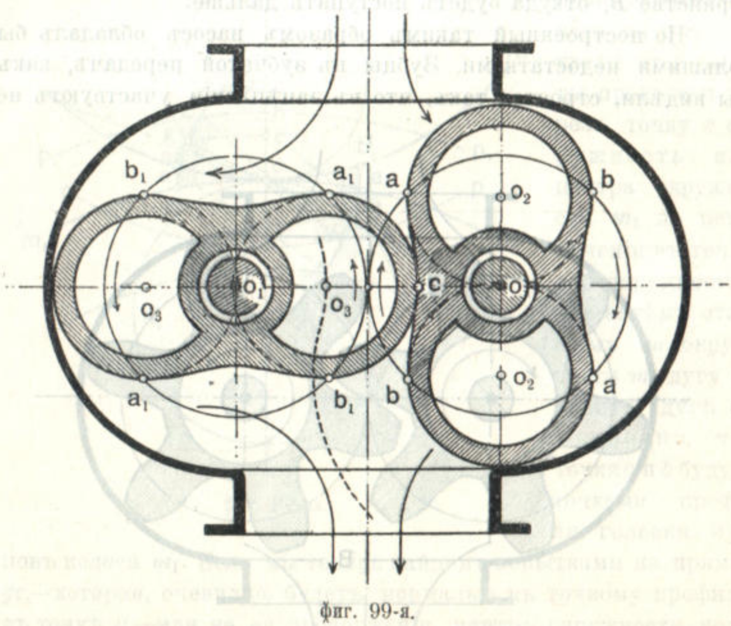
Но построенный такимъ образомъ насосъ обладалъ бы большими недостатками. Зубцы въ зубчатой передачѣ, какъ мы видѣли, строятся такъ, что въ зацѣпленіи участвуютъ не



фиг. 98-я.

всѣ точки периметра колесъ, поэтому между головками и впадинами образуются промежутки и часть жидкости, попавшая въ эти промежутки, будетъ перемѣщаться обратно изъ пространства B въ пространство A. Такъ какъ кромѣ того пространство между двумя парами зацѣпляющихся зубцовъ при вращеніи измѣняется по объему, то обратное перемѣщеніе жидкости будетъ связано съ безполезной работою ея сжиманія.

Въ виду этого зубцы колесъ коловратныхъ насосовъ строятся такъ, что въ зацѣпленіи участвуютъ послѣдовательно всѣ точки периферіи колесъ. Для примѣра разсмотримъ вентиляторъ Рута (фиг. 99). Каждое изъ равныхъ и одинаковыхъ колесъ, вращающихся съ одной и той же угловой скоростью около осей o и o_1, имѣетъ здѣсь только два зубца, очерченныхъ по окружностямъ изъ центровъ o_2 и o_3, и двѣ впадины ab и a_1b_1, которыя должны быть очерчены, очевидно, по кривымъ, параллельнымъ сокращенной эпициклоидѣ. Но при

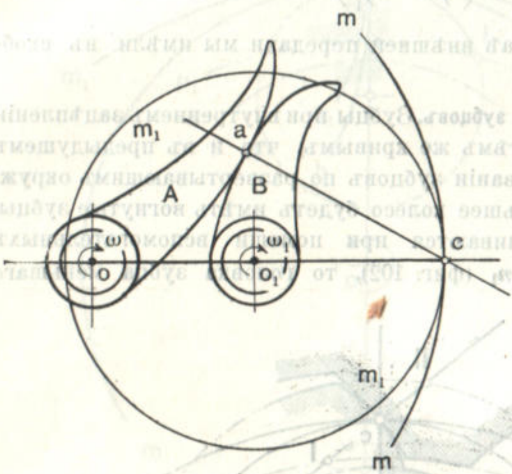


Фиг. 99-я.

такомъ способѣ очерчиванія колесъ возникаетъ то неудобство, что здѣсь не можетъ быть передачи вращенія отъ одного колеса къ другому, такъ какъ нормаль въ точкѣ соприкосновенія зубцовъ не всегда имѣетъ надлежащее направленіе; такъ напримѣръ, при положеніи колесъ, изображенномъ на чертежѣ, нормаль въ точкѣ c проходитъ черезъ центры o и o_1. Въ виду этого снаружи кожуха на продолженіи осей o и o_1 насаживаются два равныя обыкновенныя зубчатыя колеса, при помощи которыхъ вращеніе отъ одной оси передается другой съ тою же угловой скоростью въ противоположную сторону.

Колеса вращаются въ разныя стороны. Отношеніе угловыхъ скоростей постоянно. Внутренняя цилиндрическая зубчатая передача.

61. Начальныя окружности. Мы видѣли раньше (§ 50), что въ случаѣ вращенія звеньевъ A и B (фиг. 100) въ разныя стороны угловыя скорости удовлетворяютъ отношенію:



фиг. 100-я.

$$k = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{oc}{o_1c} \;. \;(1),$$

гдѣ c есть точка пересѣченія нормали въ точкѣ соприкосновенія звеньевъ A и B съ линіей центровъ.

Если задано, что отношеніе скоростей должно быть постоянно, то при данномъ разстояніи между осями

$$oo_1 = d = oc - o_1c \;.\;.\;.\;.\;.\; (2),$$

точка c должна имѣть постоянное положеніе на линіи центровъ, поэтому геометрическое ея мѣсто въ системѣ A будетъ окружность съ центромъ o и радіусомъ oc, а въ системѣ B—окружность съ центромъ o_1 и радіусомъ o_1c.

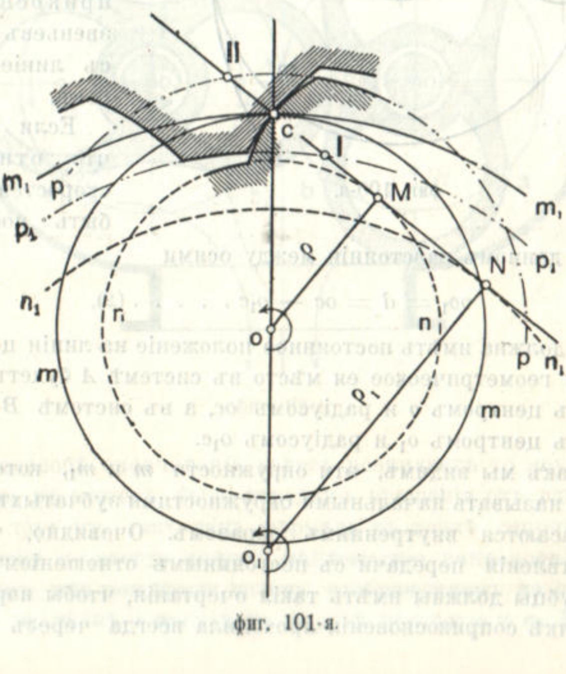
Какъ мы видимъ, эти окружности m и m_1, которыя мы будемъ называть начальными окружностями зубчатыхъ колесъ, соприкасаются внутреннимъ образомъ. Очевидно, что для осуществленія передачи съ постояннымъ отношеніемъ скоростей, зубцы должны имѣть такія очертанія, чтобы нормаль въ ихъ точкѣ соприкосновенія проходила всегда черезъ точку c, опредѣляемую по ур-іямъ (*1*) и (*2*), иначе говоря, профиль зубца одного колеса долженъ быть огибающей профиля зубца другого колеса при каченіи одной начальной окружности по другой.

Внутренняя цилиндрическая передача примѣняется рѣдко, вслѣдствіе неудобствъ чисто конструктивнаго характера, хотя въ отношеніи работы тренія она имѣетъ преимущество передъ внѣшней цилиндрической передачей. Дѣйствительно, скорость скольженія здѣсь имѣетъ слѣдующее выраженіе:

$$v = un\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

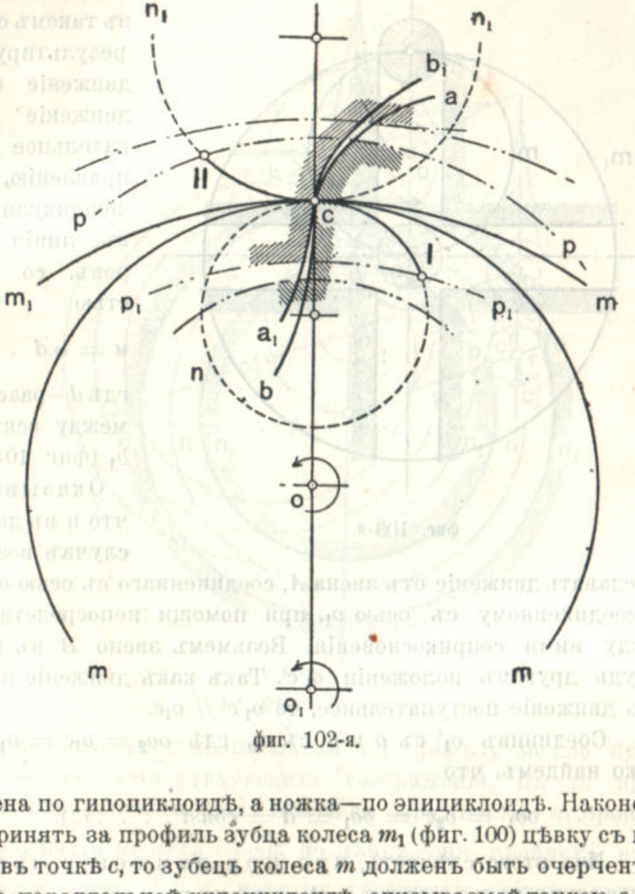
тогда какъ въ случаѣ внѣшней передачи мы имѣли въ скобкахъ знакъ плюсъ.

62. Очерчиваніе зубцовъ. Зубцы при внутреннемъ зацѣпленіи очерчиваются по тѣмъ же кривымъ, что и въ предыдущемъ случаѣ. При очерчиваніи зубцовъ по развертывающимъ окружности (фиг. 101), большее колесо будетъ имѣть вогнутые зубцы. Если зубцы очерчиваются при помощи вспомогательныхъ окружностей n и n_1 (фиг. 102), то головка зубца меньшаго



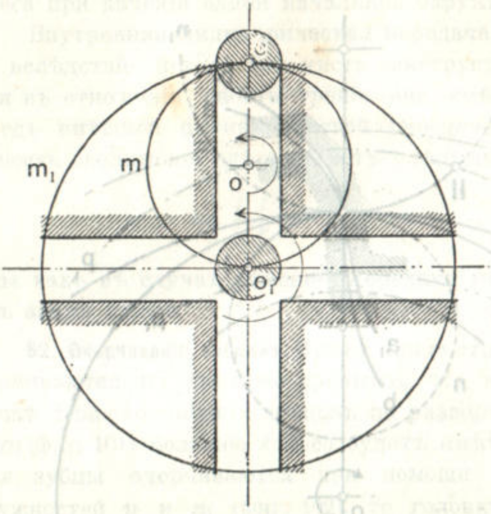
фиг. 101-я.

колеса будетъ очерчена по эпициклоидѣ, а ножка—по гипоциклоидѣ, тогда какъ на большомъ колесѣ головка зубца будетъ



фиг. 102-я.

очерчена по гипоциклоидѣ, а ножка—по эпициклоидѣ. Наконецъ, если принять за профиль зубца колеса m_1 (фиг. 100) цѣвку съ центромъ въ точкѣ c, то зубецъ колеса m долженъ быть очерченъ по кривой, параллельной гипоциклоидѣ, описываемой точкою c при каченіи окружности m_1 по m. Въ томъ частномъ случаѣ, когда $r_1 = 2r$, гипоциклоида обращается въ діаметральную прямую, такъ что если мы возьмемъ на колесѣ m_1 двѣ діаметрально противоположныя цѣвки (фиг. 103), то на колесѣ m надо сдѣлать два взаимно перпендикулярныхъ діаметральныхъ прорѣза. Особенность представляетъ тотъ случай, когда $\omega = \omega_1$. Чтобы найти въ этомъ случаѣ движеніе звена B относительно звена A, мы должны были бы сложить два вращательныхъ движенія около параллельныхъ осей съ одинаковыми угловыми скоростями, но въ разныя стороны.



фиг. 103-я.

Какъ извѣстно, въ такомъ случаѣ результирующее движеніе будетъ движеніе поступательное по направленію, перпендикулярному къ линіи центровъ, со скоростью

$$u = \omega . d \quad . \; . \; . \; (4),$$

гдѣ d—разстояніе между осями o и o_1 (фиг. 104).

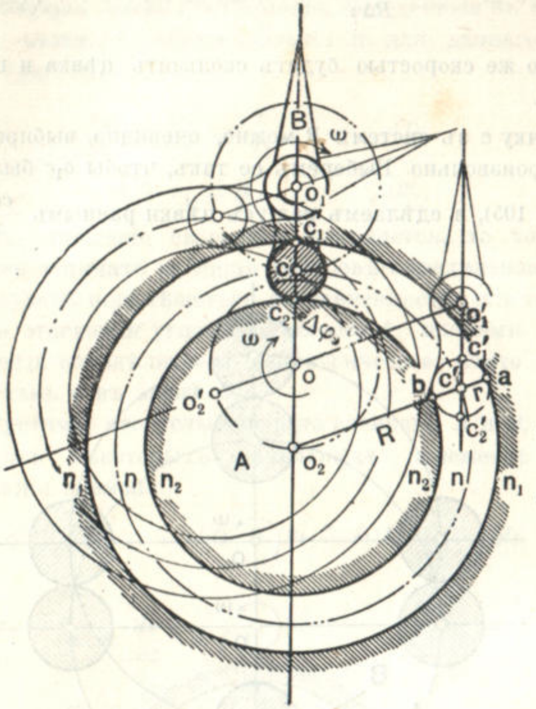
Оказывается, что и въ данномъ случаѣ возможно передавать движеніе отъ звена A, соединеннаго съ осью o, звену B, соединенному съ осью o_1, при помощи непосредственнаго между ними соприкосновенія. Возьмемъ звено B въ какомъ нибудь другомъ положеніи $o_1{}'c'$. Такъ какъ движеніе звена B есть движеніе поступательное, то $o_1{}'c' \;//\; o_1c$.

Соединивъ $o_1{}'$ съ o и c' съ o_2, гдѣ $oo_2 = o_1c = o_1{}'c'$, мы легко найдемъ, что

$$oo_1{}' = o_2c' = oo_1 = d = const \; . \; . \; . \; (5).$$

Изъ этого слѣдуетъ, что при движеніи звена B относительно звена A всякая точка перваго описываетъ окружность радіуса, равнаго разстоянію между осями, около нѣкоторой точки послѣдняго, занимающей по отношенію къ оси o такое же положеніе, какое движущаяся точка занимаетъ относительно оси o_1.

Принявъ точку c за профиль зубца колеса B, мы должны будемъ, очевидно, принять за профиль зубца колеса A окружность n. Если же за профиль зубца колеса B мы возьмемъ цѣвку съ центромъ въ c, то должны будемъ за профиль зубца колеса A принять цилиндрическій прорѣзъ $n_1 n_2$.



фиг. 104-я.

Скорость скольженія цѣвки по прорѣзу можно будетъ найти на основаніи слѣдующихъ соображеній. Въ то время, какъ точка соприкосновенія цѣвки съ окружностью n_1 пройдетъ по окружности n_1 путь $= \overset{\frown}{c_1 a}$, по цѣвкѣ она пройдетъ въ ту же сторону путь $= \overset{\frown}{c_1' a}$, поэтому, обозначая соотвѣтствующій малый промежутокъ времени чрезъ Δt, найдемъ

$$v = \frac{\overset{\frown}{c_1 a} - \overset{\frown}{c_1' a}}{\Delta t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

Обозначая радіусъ окружности n черезъ R и радіусъ цѣвки черезъ r и принимая во вниманіе, что точка c движется равномѣрно со скоростью ωd, найдемъ:

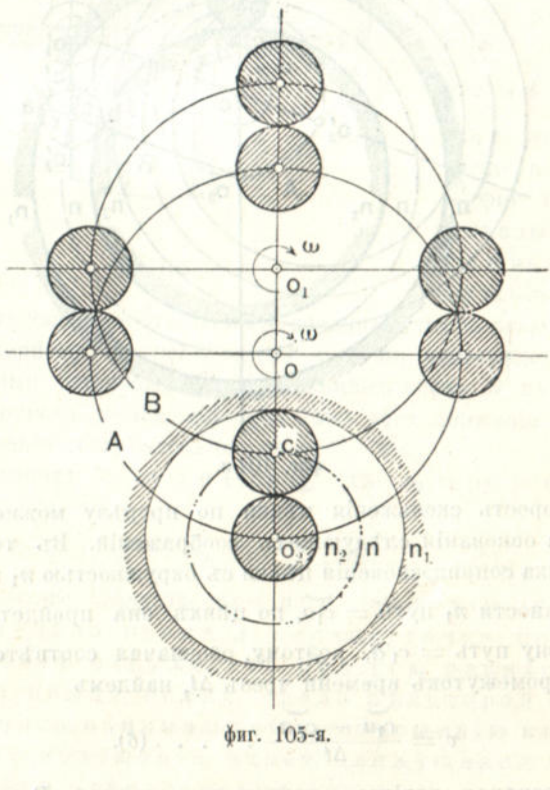
$$R\Delta\varphi = \omega d \Delta t \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

и

$$v = \frac{(R + r)\Delta\varphi - r\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} . \omega d = \omega d \ldots \ldots (8)$$

Съ такою же скоростью будетъ скользить цѣвка и по окружности n_2.

Точку c въ системѣ B можно, очевидно, выбирать совершенно произвольно. Выберемъ ее такъ, чтобы o_1c было больше o_1o (фиг. 105), и сдѣлаемъ радіусъ цѣвки равнымъ $\frac{co_2}{2}$, при-



фиг. 105-я.

чемъ $oo_2 = o_1c$; тогда зубцы на колесѣ A представятся такими же цѣвками. Такія колеса называются **п а р а л л е л ь н ы м и**.

Звенья A **и** B (фиг. 83) **вращаются въ разныя стороны; отношеніе угловыхъ скоростей перемѣнно.**

63. Формулы Эйлера. Соотношенія, выведенныя въ §§ 50 и 51, остаются, очевидно, справедливыми и для даннаго случая, такъ что (фиг. 83)

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{oc}{o_1c} = \frac{r}{r_1} \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

$$r + r_1 = d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Если отношеніе скоростей измѣняется, то точка c не будетъ уже занимать на линіи центровъ опредѣленнаго положенія, а будетъ перемѣщаться въ зависимости отъ заданнаго измѣненія отношенія угловыхъ скоростей, причемъ, понятно, можно всегда опредѣлить ея геометрическое мѣсто какъ въ звенѣ A, такъ и въ звенѣ B.

Допустимъ, что углы поворота звеньевъ A и B, отсчитываемые отъ нѣкоторыхъ начальныхъ положеній, заданы какъ функціи времени:

$$\varphi = f(t) \quad . \quad . \quad (3) \quad \text{и} \quad \varphi_1 = f_1(t) \quad . \quad . \quad . \quad (4);$$

тогда

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{d\varphi}{dt} = f'(t) \\ \omega_1 &= \frac{d\varphi_1}{dt} = f_1'(t) \end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

и, на основаніи ур-ія (1),

$$rf'(t) = r_1 f_1'(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Исключая изъ ур-ія (6) при помощи ур-ія (2) r_1, найдемъ:

$$rf'(t) = (d - r) f_1'(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

откуда

$$r = \frac{d.f_1'(t)}{f'(t) + f_1'(t)} \quad . \quad . \quad (8) \quad \text{и} \quad r_1 = d - r = \frac{d.f'(t)}{f'(t) + f_1'(t)} \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Исключая изъ послѣднихъ ур-ій при помощи ур-ій (3) и (4) t, найдемъ:

$$r = F(\varphi) \quad . \quad . \quad (10) \quad \text{и} \quad r_1 = F_1(\varphi_1) \quad . \quad . \quad (11).$$

Это и будутъ ур-ія геометрическихъ мѣстъ точки c въ системахъ A и B; кривыя, выражаемыя ур-іями (*10*) и (*11*), катятся, очевидно, одна по другой безъ скольженія.

64. Постановка задачи при практическихъ примѣненіяхъ. При практическихъ примѣненіяхъ передачи съ перемѣннымъ отношеніемъ угловыхъ скоростей задача ставится нѣсколько иначе въ виду того, что обыкновенно задается не законъ измѣненія отношенія угловыхъ скоростей, а при постоянной угловой скорости одного изъ колесъ, предѣлы измѣненія угловой скорости другого.

Очевидно, что такая задача не имѣетъ опредѣленнаго рѣшенія, такъ какъ по такимъ даннымъ можно подобрать большое число кривыхъ, которыя, вращаясь около соотвѣтственныхъ осей, будутъ въ то же время катиться одна по другой безъ скольженія. Кривыя эти должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ. На основаніи ур-ій (*1*) и (*5*) предыдущаго параграфа, имѣемъ:

$$r d\varphi = r_1 d\varphi_1 \ldots \ldots (1).$$

Дифференцируя дальше ур-іе (*2*) предыд. параграфа, найдемъ:

$$dr = - dr_1 \ldots \ldots (2).$$

Если мы раздѣлимъ почленно ур-іе (*1*) на ур-іе (*2*), получимъ:

$$r \frac{d\varphi}{dr} = - r_1 \frac{d\varphi_1}{dr_1} \ldots \ldots (3).$$

Такъ какъ выраженіе вида $r \frac{d\varphi}{dr}$ есть тангенсъ угла между радіусомъ векторомъ какой-нибудь точки кривой и касательной въ этой точкѣ, то, обозначая углы эти соотвѣтственно черезъ μ и μ_1, изъ ур-ія (*3*) найдемъ:

$$\mu = 180^\circ - \mu_1 \ldots \ldots (4).$$

Вотъ тѣ условія, которымъ должны удовлетворять искомыя кривыя. Такъ какъ условіе (*3*) есть слѣдствіе двухъ первыхъ, то, очевидно, достаточно, чтобы удовлетворялись только два изъ нихъ, ибо тогда третье будетъ также непремѣнно удовлетворено. Покажемъ, что кривыя, удовлетворяющія этимъ условіямъ, катятся одна по другой безъ скольженія. Возвысимъ для этого ур-ія (*1*) и (*2*) въ квадратъ и сложимъ:

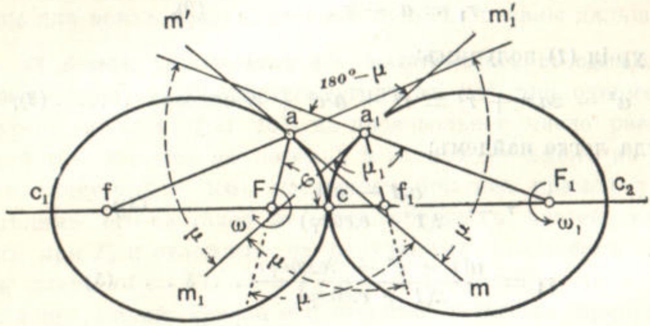
$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = dr_1{}^2 + r_1{}^2 d\varphi_1{}^2,$$

или

$$ds = ds_1,$$

гдѣ ds и ds_1 безконечно малыя дуги на той и другой кривой, что и доказываетъ, что кривыя, удовлетворяющія условіямъ (*1*) и (*2*), катятся одна по другой безъ скольженія.

65. Эллиптическія колеса. Возьмемъ два равныхъ соприкасающихся между собою вершинами эллипса (фиг. 106) и допустимъ, что они вращаются соотвѣтственно около фокусовъ F и



фиг. 106-я.

F_1. Докажемъ, что эти эллипсы будутъ удовлетворять выведеннымъ выше условіямъ, т. е. будутъ катиться одинъ по другому безъ скольженія.

Отложимъ отъ точки ихъ соприкосновенія c равныя дуги ca и ca_1 и проведемъ въ точкахъ a и a_1 касательныя mm' и m_1m_1'. Такъ какъ касательная къ эллипсу дѣлитъ внѣшній уголъ между радіусами векторами пополамъ, то легко видѣть что

$$\angle Fam = \angle m_1a_1f_1,$$

или

$$\mu = 180^\circ - \mu_1.$$

Обозначая черезъ a длину большой полуоси, имѣемъ:

$$Fa + fa = a = Fa + F_1a_1.$$

Отсюда видно, что два равныхъ эллипса, вращающихся около одноименныхъ фокусовъ и соприкасающихся въ начальный моментъ вершинами, будутъ катиться одинъ по другому безъ скольженія. Найдемъ теперь законъ измѣненія отношенія угловыхъ скоростей. Обозначая Fa черезъ r и $F_1a_1 = fa$ черезъ r_1, изъ $\triangle\, faF$ имѣемъ:

$$r_1^2 = r^2 + a^2e^2 + 2r.ae.cos\varphi \ldots \ldots (1),$$

гдѣ e—эксцентриситетъ эллипса, который, какъ извѣстно, равняется отношенію фокуснаго разстоянія къ большой оси. Замѣтивъ, что

$$r_1 = a - r \ldots \quad (2),$$

изъ ур-ія (1) получимъ:

$$a^2 - 2a.r + r^2 = r^2 + a^2e^2 + 2r.ae.cos\varphi \ldots . (3),$$

откуда легко найдемъ:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{2(1 + e.cos\varphi)} \ldots \ldots (4);$$

$$r_1 = \frac{a(1 + e^2 + 2e.cos\varphi)}{2(1 + e.cos\varphi)} \ldots \ldots (5)$$

и, на основаніи ур-ія (1 § 63),

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1} = \frac{1 - e^2}{1 + e^2 + 2e.cos\varphi} \ldots \ldots (6).$$

Легко видѣть, что

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{max} = \frac{1 + e}{1 - e} \ldots (7) \text{ и } \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{min} = \frac{1 - e}{1 + e} \ldots (8)$$

и, предполагая, что $\omega = const$,

$$n = \frac{(\omega_1)max}{(\omega_1)min} = \frac{\overline{Fc_1}^2}{\overline{Fc}^2} = \frac{(1 + e)^2}{(1 - e)^2} \ldots \quad (9).$$

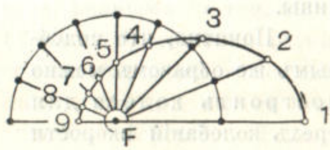
Отсюда, задаваясь величиной n и длиной оси, т. е. иначе разстояніемъ между осями вращенія, найдемъ всѣ элементы эллипса.

До сихъ поръ мы говорили лишь о начальныхъ кривыхъ зубчатыхъ колесъ и совершенно не касались вопроса о формѣ и расположеніи зубцовъ.

Что касается расположенія зубцовъ относительно начальныхъ кривыхъ, то и здѣсь, подобно передачѣ съ постояннымъ отношеніемъ скоростей, часть зубца располагается внѣ начальной кривой, часть внутри ея.

Профили зубцовъ должны быть, очевидно, взаимно огибающими при каченіи одного эллипса по другому. Практическій пріемъ построенія зубцовъ заключается въ томъ, что вся дуга эллипса дѣлится на цѣлое число частей, равныхъ шагу, а затѣмъ части дуги, содержащія цѣлое число шаговъ, замѣняются подходящими окружностями и на каждой изъ этихъ отдѣльныхъ частей зубцы строятся по тѣмъ же правиламъ, какъ въ предыдущихъ передачахъ. Подобнымъ же образомъ можно построить зубцы для всѣхъ колесъ, которыя будутъ описаны дальше.

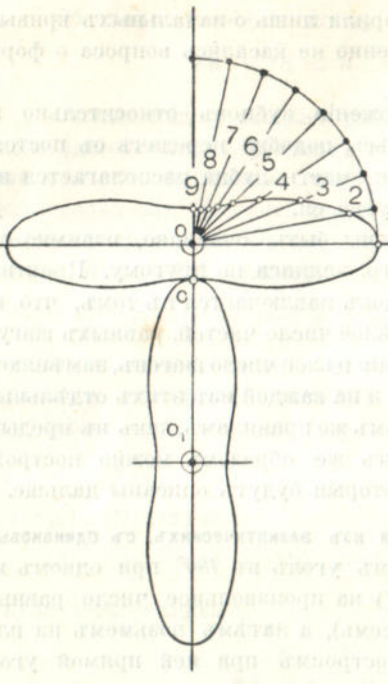
66. Колеса, производимыя изъ эллиптическихъ, съ одинаковымъ числомъ оборотовъ. Раздѣлимъ уголъ въ *180°* при одномъ изъ фокусовъ эллипса (фиг. 107) на произвольное число равныхъ частей (на чертежѣ на восемь), а затѣмъ возьмемъ на плоскости точку *o* (фиг. 108), построимъ при ней прямой уголъ, раздѣлимъ его на такое же число равныхъ частей, какъ и уголъ при *F*, и отложимъ на полученныхъ радіусахъ векторахъ длины $o1 = F1$, $o2 = F2$ и т. д. Соединивъ точки *1*, *2* и т. д. непрерывной кривой и построивъ такія же кривыя въ трехъ остальныхъ прямыхъ углахъ около точки *o*, мы получимъ замкнутую кривую. Двѣ такихъ кривыхъ, вращаясь около точекъ o и o_1 и соприкасаясь между собою какъ показано на фигурѣ, будутъ, очевидно, катиться одна по другой безъ скольженія и, слѣдовательно, могутъ послужить начальными кривыми для зубчатыхъ колесъ.



фиг. 107-я.

Дѣйствительно, изъ самаго построенія мы видимъ, что сумма радіусовъ векторовъ двухъ кривыхъ въ точкѣ ихъ соприкосновенія будетъ величина постоянная, т. е.

$$r + r_1 = const \quad . \ . \ . \ . \ . (1).$$



фиг. 108-я.

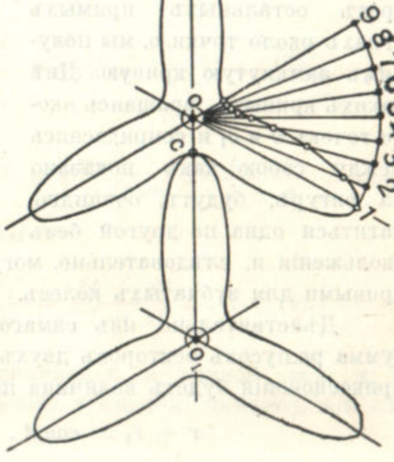
Затѣмъ, такъ какъ ур-іе этой кривой будетъ отличаться отъ ур-ія эллипса только тѣмъ, что вмѣсто φ надо поставить 2φ, то, очевидно, удовлетворится и условіе

$$r\,\frac{d\varphi}{dr} = r_1\,\frac{d\varphi_1}{dr_1} \quad . \; . \; . \; (2).$$

Разъ эти два условія удовлетворяются, то, какъ мы видѣли въ § 64, кривыя будутъ катиться одна по другой безъ скольженія.

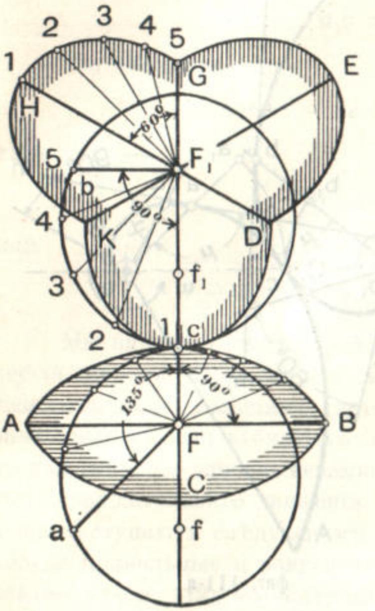
Такимъ образомъ, при помощи описаннаго преобразованія эллипса мы можемъ получить за время одного оборота осей два колебанія скорости отъ наибольшей до наименьшей величины.

Понятно, что подобнымъ же образомъ можно построить колеса для трехъ колебаній скорости (фиг. 109), если взять около точки o уголъ въ 60° и раздѣлить его на то же число частей, какъ уголъ при F (фиг. 107). Взявъ уголъ при точкѣ o въ 45°, мы получимъ четыре колебанія, при углѣ въ 36°—пять колебаній и т. д.



фиг. 109-я.

67. Колеса, производимыя изъ эллиптическихъ, съ разнымъ числомъ оборотовъ. Отложимъ на двухъ равныхъ, соприкасающихся между собою эллипсахъ и вращающихся соотвѣтственно около фокусовъ F и F_1 (фиг. 110), равныя дуги ca и cb, но при томъ такъ, чтобы стягиваемые этими дугами углы cFa и cF_1b находились между собою въ отношеніи $3:2$.



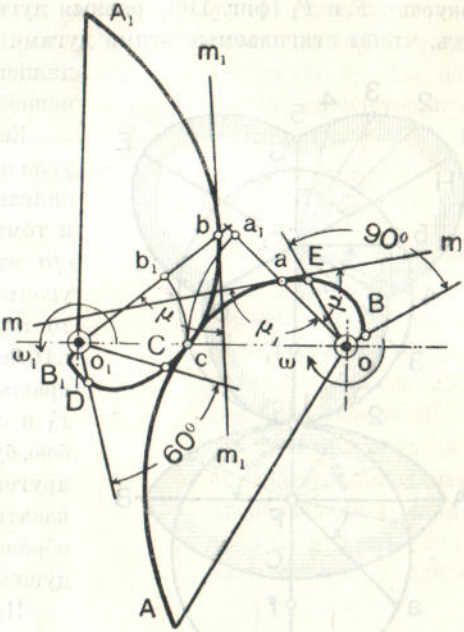
фиг. 110-я.

Если мы сократимъ оба угла при помощи построенія, описаннаго въ § 66, въ одномъ и томъ же отношеніи: уголъ cfa въ прямой уголъ cFA, а уголъ cF_1b въ уголъ $cF_1K=60°$, то получимъ двѣ кривыя: $cACBc$ и $cDEGHKc$, которыя, вращаясь около точекъ F и F_1 и соприкасаясь между собою, будутъ катиться одна по другой безъ скольженія. Доказать это можно такимъ же образомъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

При выбранномъ нами соотношеніи между углами мы, очевидно, получимъ колеса съ отношеніемъ чиселъ оборотовъ, равнымъ $^3/_2$, т. е. въ то время, какъ ось F сдѣлаетъ три оборота, F_1 сдѣлаетъ только два оборота. Выбирая соотвѣтственнымъ образомъ отношеніе между углами cFa и cF_1b, мы можемъ получить колеса и съ другимъ желаемымъ отношеніемъ чиселъ оборотовъ. Такимъ образомъ, какъ мы видимъ, при помощи преобразованія эллипса мы можемъ получить разнообразныя колеса, удовлетворяющія различнымъ практическимъ задачамъ.

Такое же средство для построенія колесъ съ перемѣннымъ отношеніемъ скоростей даетъ логариѳмическая спираль.

68. Колеса, составленныя изъ дугъ логариѳмической спирали, съ одинаковымъ числомъ оборотовъ. Покажемъ, что двѣ одинаковыя логариѳмическія спирали (фиг. 111), вращаясь около своихъ полюсовъ o и o_1, будутъ катиться одна по другой безъ скольженія, если только радіусы векторы одной спирали возрастаютъ вверхъ отъ линіи центровъ, а другой внизъ. При этомъ совершенно безразлично какими точками онѣ соприкасаются въ начальный моментъ.



фиг. 111-я.

Отложимъ отъ точки соприкосновенія c равныя элементарныя дуги ca и cb и проведемъ въ точкахъ a и b касательныя mm и m_1m_1. Легко видѣть, что

$\angle\mu = 180^\circ - \angle\mu_1 \,..\, (1).$

Дѣйствительно, ур-іе логариѳмической спирали въ полярныхъ координатахъ, съ началомъ въ полюсѣ спирали, имѣетъ слѣдующій видъ:

$$r = r_0 . e^{m\theta} \;.\;.\;.\;.\;.\; (2),$$

гдѣ e—основаніе натуральныхъ логариѳмовъ, θ—уголъ радіуса вектора съ полярной осью, а r_0 и m—постоянныя величины. Отсюда легко найдемъ, что

$$tg\mu = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{m} = const \;.\;.\;.\;.\; (3),$$

т. е. уголъ между касательной и радіусомъ векторомъ есть величина постоянная для всѣхъ точекъ спирали, вслѣдствіе чего для точекъ a и b и имѣетъ мѣсто соотношеніе (1).

Опишемъ изъ точекъ o и o_1 соотвѣтственными радіусами oc и o_1c дуги окружностей ca_1 и cb_1 до пересѣченія съ радіусами векторами oa и o_1b. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ca_1a и cb_1b имѣемъ:

$$a_1a = \breve{ca}.cos\mu \quad \text{и} \quad bb_1 = \breve{cb}.cos\mu,$$

откуда, принимая во вниманіе равенство дугъ ca и cb, имѣемъ:

$$a_1a = bb_1.$$

Но, очевидно, что

$$a_1a = -\,dr \quad \text{и} \quad bb_1 = dr_1;$$

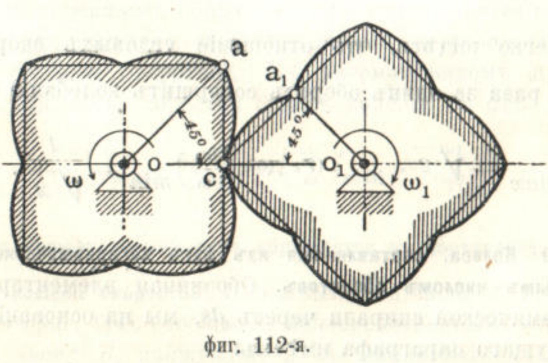
такъ что

$$dr = -\,dr_1$$

или

$$r + r_1 = const = oo_1 \;.\;\;.\;\;.\;(4)$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что двѣ равныя логариѳмическія спирали, вращающіяся около своихъ полюсовъ, удовлетворяютъ тѣмъ условіямъ, которымъ должны удовлетворять начальныя кривыя зубчатыхъ колесъ. Такъ какъ логариѳмическая спираль—кривая незамкнутая, то для передачи непрерывно-вращательнаго движенія въ одномъ и томъ же направленіи поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Берутъ два какіе нибудь правильные и равные многоугольника, напримѣръ два квадрата (фиг. 112), съ центрами въ полюсахъ спиралей o и o



фиг. 112-я.

и каждую сторону замѣняютъ двумя равными дугами логариѳмическихъ спиралей. Ур-іе этихъ дугъ находится просто.

Обозначая сторону квадратовъ черезъ $2a$ и разстояніе oo_1— черезъ d, имѣемъ:

$$a = \frac{d}{1+\sqrt{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Далѣе, замѣчая, что координаты точки c дуги ca будутъ

$$\theta = o \quad \text{и} \quad r = a,$$

а точки a

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad r = a\sqrt{2},$$

легко найдемъ въ ур-іи (2) постоянныя r_0 и m. Дѣйствительно, подставляя въ это ур-іе координаты точекъ c и a, находимъ:

$$r_0 = a \quad \text{и} \quad m = \frac{2}{\pi} lg2.$$

Такимъ образомъ, ур-іе дуги ac, а, слѣдовательно, и всѣхъ другихъ, напишется такъ:

$$r = a.2^{\frac{2\theta}{\pi}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

Этимъ ур-іемъ и можно воспользоваться для построенія дугъ по точкамъ.

Легко видѣть, что отношеніе угловыхъ скоростей $\frac{\omega_1}{\omega}$ четыре раза за одинъ оборотъ совершитъ колебаніе отъ

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{max} = \sqrt{2} \; . \; . \; . \; . \; (7) \quad \text{до} \quad \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \; . \; . \; . \; . \; . \; (8).$$

69. Колеса, составленныя изъ дугъ логариѳмической спирали, съ разнымъ числомъ оборотовъ. Обозначая элементарную дугу логариѳмической спирали черезъ ds, мы на основаніи ур-ія (3) предыдущаго параграфа имѣемъ:

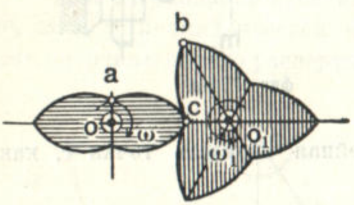
$$ds = \sqrt{1 + r^2 \frac{d\varphi^2}{dr^2}} \, . \, dr = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \, . \, dr \; . \; . \; (1).$$

Интегрируя это выраженіе въ предѣлахъ между двумя точками, соотвѣтственные радіусы векторы которыхъ разнятся на длину l, имѣемъ:

$$s = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \cdot l \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

т. е. длина дуги логариѳмической спирали пропорціональна разности радіусовъ векторовъ ея концовъ.

Отсюда слѣдуетъ, что если мы возьмемъ на логариѳмической спирали двѣ равныя дуги, то разность радіусовъ векторовъ, соотвѣтствующихъ ихъ концамъ, будетъ для обѣихъ дугъ одна и та же. Эти двѣ дуги мы можемъ выбрать такъ, чтобы одна изъ нихъ BE (фиг. 111) стягивала, напримѣръ, прямой уголъ, а другая CD—уголъ въ $60°$. Если мы составимъ изъ этихъ дугъ замкнутыя фигуры (фиг. 113), то онѣ, вращаясь около точекъ o и o_1, гдѣ сходятся вершины стягиваемыхъ соотвѣтственными дугами угловъ, будутъ катиться одна по другой безъ скольженія и могутъ, такимъ образомъ, послужить начальными кривыми зубчатыхъ колесъ, одно изъ которыхъ будетъ дѣлать три оборота, пока второе сдѣлаетъ только два.



фиг. 113-я.

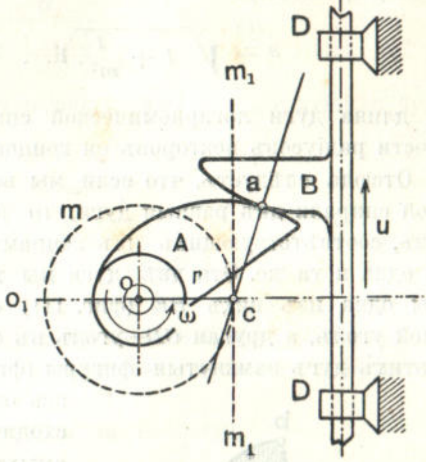
Подбирая надлежащимъ образомъ углы, стягивыемые равными дугами, можно, очевидно, получить колеса съ желаемыми различными числами оборотовъ. Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ отношеніе угловыхъ скоростей будетъ колебаться отъ

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{max} = \frac{oc}{o_1c} \text{ до } \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{min} = \frac{oa}{o_1b}.$$

Одна изъ вращательныхъ паръ обращается въ поступательную.

70. Отношеніе скоростей. Положимъ, что звено A, вращаясь около оси o (фиг. 114), сообщаетъ непосредственнымъ соприкосновеніемъ звену B, движущемуся въ направляющихъ D, поступательное движеніе. Найдемъ отношеніе между угловой скоростью ω звена A и скоростью u поступательнаго движенія звена B.

Очевидно, что данную цѣпь мы можемъ разсматривать какъ частный случай цѣпи, изображенной на фиг. 83, когда центръ вращенія звена B удалился на безконечность въ направленіи, перпендикулярномъ къ направленію скорости u.



фиг. 114-я.

Если мы проведемъ нормаль въ точкѣ соприкосновенія звеньевъ A и B до пересѣченія съ линіей центровъ oo_1, то будемъ по предыдущему имѣть:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{oc}{o_1c} \ldots (1).$$

На основаніи этого, линейная скорость точки c, какъ точки звена B, будетъ

$$u = \omega_1 . o_1c = \omega . oc \ldots\ldots (2).$$

Если o_1 удаляется на безконечность, то ω_1 становится безконечно малой величиной, а o_1c—безконечно большой, но произведеніе ихъ, какъ видно изъ ур-ія (2), есть величина конечная, равная скорости поступательнаго движенія звена B.

Ур-іе (2) и устанавливаетъ отношеніе между ω и u. Обозначая oc черезъ r, имѣемъ:

$$\frac{u}{\omega} = r \ldots\ldots (3).$$

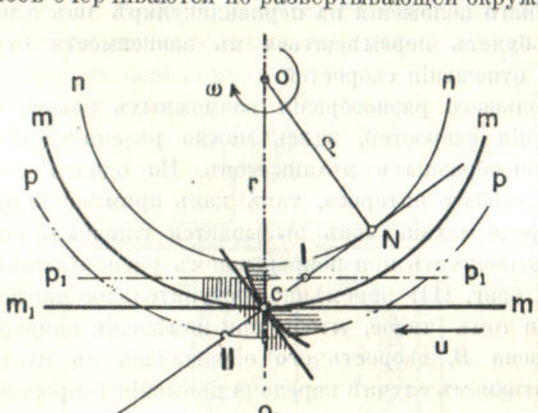
Точка c, очевидно, есть мгновенный центръ въ относительномъ движеніи одного изъ звеньевъ по отношенію къ другому.

71. Отношеніе скоростей постоянно. Если отношеніе u къ ω будетъ при всякихъ положеніяхъ звеньевъ A и B (фиг. 114) имѣть постоянную величину, то геометрическое мѣсто точки c въ системѣ A будетъ окружность m, описанная изъ o радiусомъ r, а въ системѣ B—прямая m_1m_1, параллельная скорости u. Движеніе будетъ происходить такъ, какъ будто прямая m_1m_1 катится по окружности m, или обратно.

Очевидно, что для удовлетворенія условія постоянства скоростей необходимо очертить соприкасающіяся части звеньевъ A и B такъ, чтобы нормаль въ общей точкѣ ихъ соприкосновенія всегда проходила черезъ точку c, или, иначе, чтобы при каченіи прямой m_1m_1 по окружности m профиль зубца звена B огибалъ профиль зубца звена A.

Что касается расположенія зубцовъ колеса относительно начальной окружности m и зубцовъ рейки относительно начальной прямой m_1m_1, то здѣсь обыкновенно придерживаются тѣхъ же соотношеній, что и въ цилиндрической зубчатой передачѣ (§ 52).

Для очерчиванія зубцовъ пользуются тѣми же способами, какъ въ цилиндрической передачѣ. Чаще всего зубцы колесъ очерчиваются по развертывающей окружности n (фиг. 115), концентрической съ начальной. Въ этомъ случаѣ профиль зубца рейки будетъ прямая, перпендикулярная къ касательной окружности n, проведенной изъ точки c. Это ясно изъ того, что нормали во всѣхъ точкахъ этого профиля должны быть параллельны прямой cN.



фиг. 115-я.

Головки и впадины зубцовъ колеса ограничиваются окружностями, концентрическими съ m, а головки и впадины зубцовъ рейки—прямыми, параллельными m_1m. Зацѣпленіе зубцовъ будетъ происходить на прямой cN въ предѣлахъ отъ точки I до II, гдѣ ее пересѣкаютъ прямая головокъ рейки и окружность головокъ колеса.

На основанiи изложеннаго въ (§ 55), точка I не должна выходить за точку N; что касается до точки II, то ея положенiе на прямой cN ничѣмъ не ограничено.

Возможно, конечно, очерчивать профили зубцовъ и другими кривыми. При построенiи зубцовъ при помощи вспомогательныхъ окружностей, головки зубца колеса будутъ очерчены по эпициклоидѣ, а ножки по гипоциклоидѣ; на рейкѣ и ножки, и головки будутъ очерчены по циклоидѣ. Если за профиль зубца рейки возьмемъ цѣвку съ центромъ на прямой m_1m_1, то на колесѣ зубецъ долженъ быть очерченъ по развертывающей начальной окружности m. Если, наоборотъ, цѣвку съ центромъ на окружности m возьмемъ за профиль зубца колеса, то зубецъ рейки долженъ быть очерченъ по кривой, параллельной циклоидѣ, описываемой какой-нибудь точкою окружности m при ея каченiи по прямой m_1m.

72. Отношенiе скоростей перемѣнно. При перемѣнномъ отношенiи скоростей u и ω, точка c (фиг. 114) не будетъ уже занимать постояннаго положенiя на перпендикулярѣ изъ o на направленiе u, а будетъ перемѣщаться въ зависимости отъ закона измѣненiя отношенiя скоростей.

Въ виду большого разнообразiя возможныхъ законовъ измѣненiя отношенiя скоростей, здѣсь можно разсматривать цѣлый рядъ разнообразныхъ механизмовъ. Но однако, это не представляетъ особаго интереса, такъ какъ примѣненiе на практикѣ такого рода механизмовъ вызывается главнымъ образомъ желанiемъ получить при непрерывномъ равномѣрномъ вращенiи звена A (фиг. 114) перемѣнно-поступательное движенiе звена B, и при томъ такое, чтобы при измѣненiи направленiя движенiя звена B, скорость его обращалась въ нуль, такъ какъ въ противномъ случаѣ передача движенiя сопровождалась бы толчками.

Однимъ изъ простѣйшихъ движенiй, удовлетворяющихъ такимъ условiямъ, является движенiе гармоническое, выражаемое уравненiемъ:

$$s = a.sin\alpha t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

гдѣ s—разстоянiе точки, за движенiемъ которой мы слѣдимъ, отъ средняго положенiя, a—амплитуда колебанiя, т. е. наибольшее возможное разстоянiе движущейся точки отъ средняго положенiя, t—время, отсчитываемое отъ момента прохожденiя точки черезъ среднее положеніе и $\alpha = \frac{2\pi}{T}$, гдѣ T—періодъ, т. е. время полнаго колебанія точки взадъ и впередъ.

Взявъ отъ обѣихъ частей ур-ія (*1*) производную по t, получимъ:

$$u = \frac{ds}{dt} = a.\alpha.cos\alpha t \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

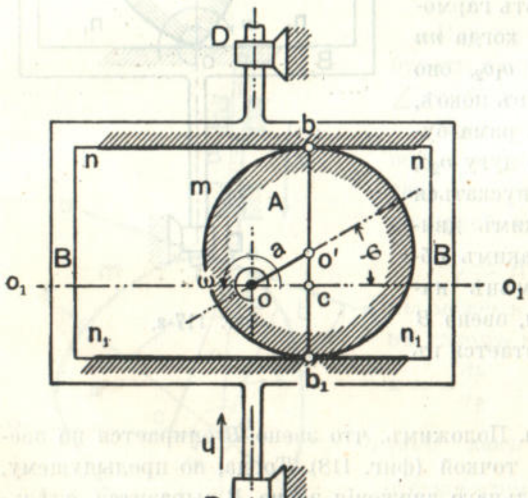
Если мы вернемся къ нашей цѣпи (фиг. 114) и замѣтимъ, что время полнаго обращенія звена A равно, очевидно, T, то, полагая $\omega = const$, найдемъ:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \alpha,$$

такъ что, на основаніи ур-ія (*2*), имѣемъ:

$$r = \frac{u}{\omega} = a.cos\omega t \ . \ . \ . \ . \ (3),$$

т. е., если звено B движется гармонически, то и точка c совершаетъ по линіи oo_1 такое же движеніе съ тою же амплитудой и тѣмъ же періодомъ.



фиг. 116-я.

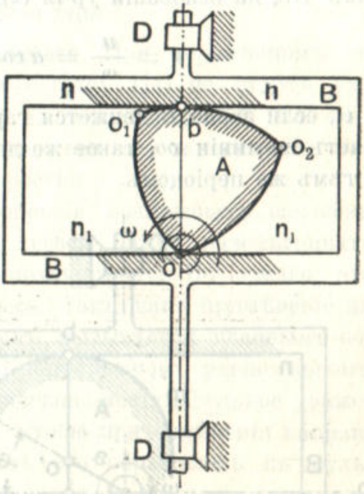
Если обозначимъ уголъ поворота звена A отъ начальнаго положенія, отъ котораго мы отсчитываемъ время, черезъ φ, то можемъ переписать ур-іе (*3*) въ слѣдующемъ видѣ:

$$r = \frac{u}{\omega} = a.cos\varphi \ . \ (4).$$

Выберемъ за профиль зубца звена B прямую nn (фиг. 116), перпендикулярную къ направленію скорости u. Легко видѣть, что зубецъ звена A долженъ быть очерченъ по окружности произвольнаго радіуса изъ центра o', лежащаго отъ o на разстояніи $oo' = a$, ибо нормаль въ точкѣ соприкосновенія окружности m съ прямою nn всегда будетъ проходить черезъ o' и оставаться параллельной u, въ виду чего треугольникъ $oo'c$ будетъ всегда прямоугольнымъ и oc будетъ удовлетворять ур-ію (4).

Если звено B будетъ прижато къ A нѣкоторымъ усиліемъ, направленнымъ сверху внизъ, то оно будетъ всегда слѣдовать за звеномъ A. Чтобы избѣжать нажатія, звену B можно придать форму рамы съ двумя параллельными сторонами nn и n_1n_1, отстоящими другъ отъ друга на величину діаметра окружности m.

Въ механизмѣ, изображенномъ на фиг. 117, звено A, вращающееся около точки o, очерчено тремя дугами равныхъ окружностей изъ центровъ o, o_1 и o_2. Пока прямая nn опирается на дугу oo_1, звено B будетъ имѣть гармоническое движеніе; когда nn опирается на дугу o_1o_2, оно будетъ оставаться въ покоѣ, и, наконецъ, когда рама будетъ опираться на дугу o_2o, звено B будетъ опускаться внизъ гармоническимъ движеніемъ. Здѣсь, такимъ образомъ, при перемѣнѣ направленія движенія, звено B нѣкоторое время остается въ состояніи покоя.



фиг. 117-я.

73. Эксцентрики. Положимъ, что звено B опирается на звено A только одной точкой (фиг. 118). Тогда, по предыдущему, скорость поступательнаго движенія звена B выразится слѣдующимъ образомъ:

$$u = \omega . oc = \omega . r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

гдѣ oc—отрѣзокъ прямой oo_1, перпендикулярной къ направленію u, между центромъ вращенія o звена A и точкой пересѣченія ея съ нормалью ac къ кривой m въ точкѣ опоры.

Разсмотримъ здѣсь тотъ частный случай, когда b всегда совпадаетъ съ o (фиг. 119). Въ этомъ случаѣ звено A называютъ обыкновенно эксцентрикомъ.

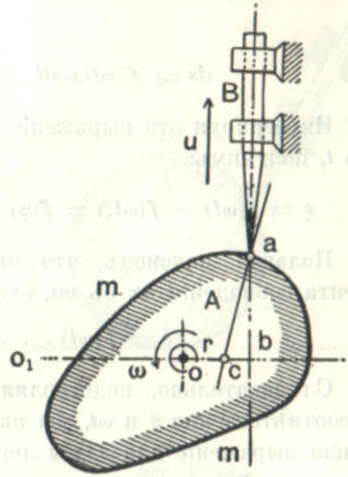
Изъ ур-ія (*1*) имѣемъ:

$$u = -\omega . oc \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Если мы обозначимъ уголъ между касательной nn къ кривой m въ точкѣ a и радіусомъ векторомъ oa черезъ μ, то легко найдемъ:

$$oc = \rho . ctg\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

и $\quad u = -\omega . \rho . ctg\mu \quad . \quad . \quad . \quad (4).$



фиг. 118-я.

Изъ ур-ія (*4*) видно, что u будетъ направлено вверхъ, если $\angle\mu < 90°$ и внизъ, если $\angle\mu > 90°$.

Предполагая, что ур-іе кривой m въ полярныхъ координатахъ съ полюсомъ въ o и съ полярной осью ox будетъ

$$\rho = f(\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

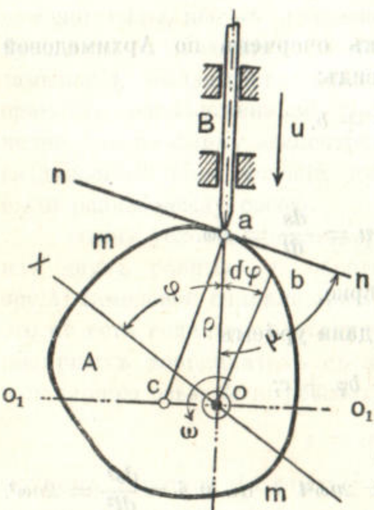
мы можемъ ур-іе (*4*) переписать въ такомъ видѣ:

$$u = \omega\frac{d\rho}{d\varphi} = \omega f'(\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

такъ какъ $ctg\mu = -\dfrac{d\rho}{\rho d\varphi}$;

отсюда элементъ пути, пройденный какой нибудь точкою звена B за время dt, будетъ

$$ds = \omega . f'(\varphi) . dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$



фиг. 119-я.

Если за то же время эксцентрикъ A повернется на уголъ $d\varphi$, то, предполагая, что $\omega = const$, будемъ имѣть:

$$\omega dt = d\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

и

$$ds = f'(\omega t).\omega.dt \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

Интегрируя это выраженіе въ предѣлахъ времени отъ t_0 до t, получимъ:

$$s = f(\omega t) - f(\omega t_o) = f(\varphi) - f(\varphi_o) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

Полагая, наконецъ, что мы ведемъ счетъ времени отъ момента совпаденія ox съ oa, окончательно имѣемъ:

$$s = f(\omega t) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11).$$

Слѣдовательно, подставляя въ ур-іе кривой m вмѣсто ρ и φ соотвѣтственно s и ωt, мы найдемъ законъ движенія звена B. Зная выраженіе для s, мы легко найдемъ и скорость и ускореніе звена B.

Можно, конечно, такимъ же образомъ рѣшать и обратную задачу, т. е. искать ур-іе кривой m по заданному закону движенія.

Примѣръ 1. Эксцентрикъ очерченъ по Архимедовой спирали, ур-іе которой имѣетъ видъ:

$$s = a\varphi + b.$$

Тогда имѣемъ:

$$s = a.\omega t + b \text{ и } u = \frac{ds}{dt} = a\omega.$$

Звено B движется равномѣрно.

Примѣръ 2. Кривая m дана ур-іемъ

$$\rho = a\varphi^2 + b\varphi + c;$$

отсюда:

$$s = a\omega^2 t^2 + b.\omega t + c; \; u = \frac{ds}{dt} = 2a\omega^2 t + a\omega \text{ и } j = \frac{ds^2}{dt^2} = 2a\omega^2.$$

Звено B движется равномѣрно ускореннымъ движеніемъ.

Примѣръ 3. Пусть требуется, чтобы звено B имѣло гармоническое движеніе, т. е. чтобы

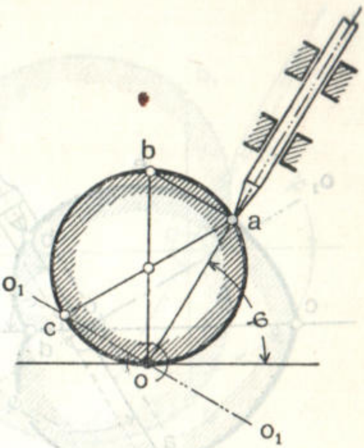
$$s = a.\sin\omega t.$$

Отсюда

$$\rho = a.\sin\varphi.$$

Очевидно, что эксцентрикъ долженъ представлять собою кругъ діаметра a, вращающійся около нѣкоторой точки окружности (фиг. 120). Дѣйствительно, изъ прямоугольнаго треугольника bao, имѣемъ:

$$oa = ob.\sin\varphi.$$



фиг. 120-я.

74. Эксцентрики съ двумя точками опоры. Разсмотрѣнные нами въ предыдущемъ параграфѣ механизмы заключаютъ въ себѣ одну пару, состоящую изъ эксцентрика и острія, которая должна быть замкнута при помощи силы, ибо въ противномъ случаѣ звено B не будетъ слѣдовать за движеніемъ звена A. Чтобы избѣжать силового замыканія, эксцентрикъ помѣщаютъ между двумя остріями (фиг. 121), расположенными діаметрально противоположно. Понятно, что на форму эксцентрика въ такомъ случаѣ налагается дополнительное условіе, именно, чтобы всѣ діаметры его были равны между собою.

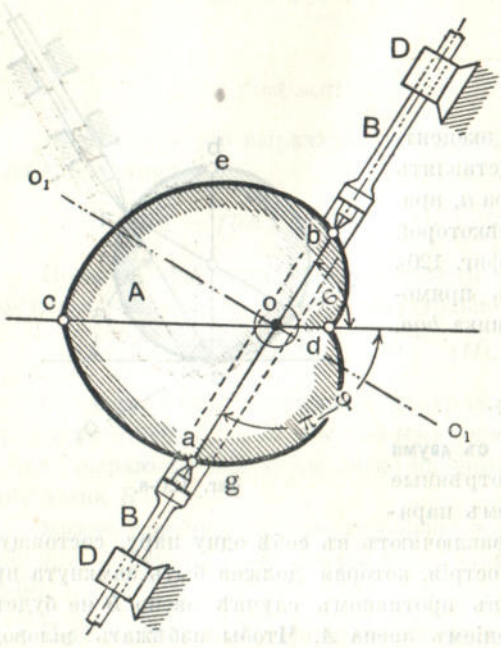
Этому условію удовлетворяетъ эксцентрикъ, составленный изъ двухъ равныхъ, но обратно расположенныхъ дугъ dec и dgc Архимедовой спирали (фиг. 121), такъ какъ всякій діаметръ его ab есть величина постоянная. Дѣйствительно, обѣ дуги въ полярныхъ координатахъ съ полюсомъ въ центрѣ вращенія o и полярною осью dc выражаются ур-іемъ

$$\rho = a\varphi + b,$$

причемъ для дуги dec уголъ φ отсчитывается противъ стрѣлки часовъ, а для дуги dgc—по стрѣлкѣ часовъ, такъ что

$$ab = ob + oa = a\varphi + b + a(\pi - \varphi) + b = a\pi + 2b = const.$$

Мы знаемъ (§ 73), что такой эксцентрикъ при равномѣрномъ вращеніи сообщаетъ звену B равномѣрно-поступательное движеніе, такъ что, когда звено B измѣняетъ направленіе своего движенія, скорость его отъ нѣкоторой величины $+u$ сразу переходитъ къ $-u$. Это обстоятельство является большимъ недостаткомъ разсматриваемаго эксцентрика, такъ какъ такое быстрое измѣненіе скорости всегда сопровождается ударами и сотрясеніями, вредно отзывающимися на прочности частей механизма.



фиг. 121-я.

Такъ какъ въ такого рода механизмахъ граничныя условія гораздо важнѣе, чѣмъ законъ движенія, то Моренъ задался цѣлью составить такой эксцентрикъ, который, имѣя всѣ діаметры между собою равными, обусловливалъ бы въ то же время при концахъ хода скорость, равную нулю.

Эксцентрикъ Морена (фиг. 122) состоитъ изъ четырехъ дугъ полярныхъ параболъ, расположенныхъ попарно симметрично относительно прямой ac. Ур-іе дугъ ab и ab_1 (углы boa и b_1oa равны $\frac{\pi}{2}$) въ полярныхъ координатахъ съ полюсомъ въ центрѣ вращенія o и съ полярною осью ac, имѣетъ видъ:

$$\rho = a\varphi^2 + b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12),$$

а дугъ b_1c и bc въ тѣхъ же координатахъ:

$$\rho_1 = a_1\varphi^2 + b_1\varphi + c_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13).$$

Постоянныя въ этихъ ур-іяхъ опредѣляются на основаніи слѣдующихъ условій:

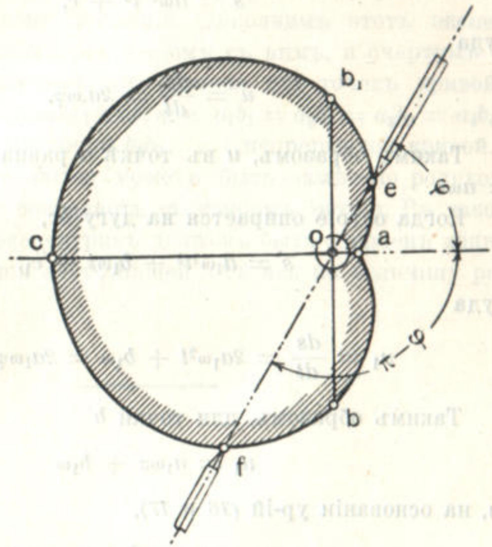
Для $\varphi = 90^\circ$ имѣемъ:

$$a\frac{\pi^2}{4} + b = a_1\frac{\pi^2}{4} + b_1\frac{\pi}{4} + c_1 \cdot (14).$$

Разность $oc - oa =$ ходу звена $B = h$, т. е.

$$h = (\rho_1)_{\varphi=\pi} - (\rho)_{\rho=o} = a_1\pi^2 + b_1\pi + c_1 - b. (15).$$

Всѣ діаметры эксцентрика равны между собою, т. е.



фиг. 122-я.

$$ef = oe + of = a\varphi^2 + b + a_1\pi^2 - 2a_1\pi\varphi + a_1\varphi^2 + b_1\pi - b_1\varphi + c_1 = const,$$

откуда, такъ какъ коэффиціенты при φ должны обращаться въ нуль,

$$a = -a_1 \ldots\ldots\ldots (16),$$

$$2a_1\pi + b_1 = o \ldots\ldots (17).$$

Постоянная $b = oa$ можетъ быть выбрана произвольно, на основаніи соображеній конструктивнаго характера, а тогда остальныя четыре опредѣлятся изъ ур-ій (*14—17*).

Покажемъ теперь, что при такомъ очертаніи экцентрика скорость звена B въ концахъ хода равна нулю и въ точкахъ b и b_1, гдѣ сопрягаются дуги двухъ различныхъ кривыхъ, измѣняется непрерывно.

Когда остріе опирается на дугу *ab*, законъ движенія звена *B*, по предыдущему, выразится слѣдующимъ образомъ:

$$s = a\omega^2 t^2 + c,$$

откуда

$$u = \frac{ds}{dt} = 2a.\omega\varphi.$$

Такимъ образомъ, *u* въ точкѣ *a* равна нулю, а въ точкѣ $b = a\omega\pi$.

Когда остріе опирается на дугу *bc*,

$$s = a_1\omega^2 t^2 + b_1\omega t + c_1,$$

откуда

$$u_1 = \frac{ds}{dt} = 2a_1\omega^2 t + b_1\omega = 2a_1\omega\varphi + b_1\omega.$$

Такимъ образомъ, для точки *b*

$$u_1 = a_1\omega\pi + b_1\omega$$

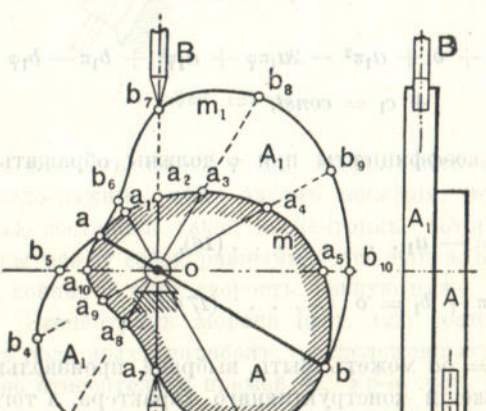
или, на основаніи ур-ій *(16* и *17)*,

$$u_1 = a_1\omega\pi - 2a_1\pi\omega = a\pi\omega,$$

слѣдовательно, при переходѣ черезъ точку *b* скорость измѣняется непрерывно. Наконецъ, для точки *c*, имѣя въ виду ур-іе (*17*), получимъ:

$$u_1 = 2a_1\omega\pi + b_1\omega = 0.$$

Если острія *B* и B_1 (фиг. 123) будутъ размѣщены въ разныхъ плоскостяхъ, то тогда, при помощи весьма простого по-



фиг. 123-я.

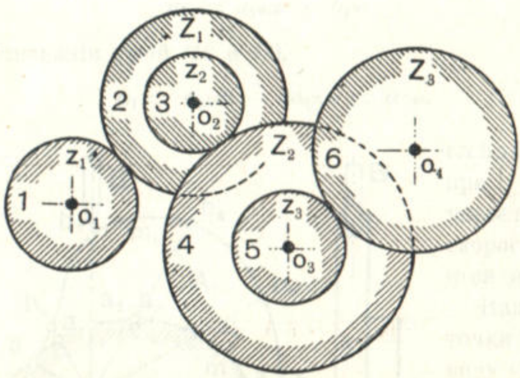
строенія, можно достигнуть того, чтобы всякій эксцентрикъ удовлетворялъ условію постоянства длины діаметровъ. Положимъ, что эксцентрикъ A очерченъ кривой m, удовлетворяющій заданному закону движенія. Дополнимъ этотъ эксцентрикъ другимъ A_1, стоящимъ рядомъ съ нимъ, и очертимъ его кривой, которую получимъ, откладывая отъ точекъ кривой m длину наибольшаго діаметра ab, т. е. $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = a_4b_4 = \ldots = ab$, и соединяя точки $b_1b_2\ldots\ldots$ непрерывной кривой.

Замѣтимъ, что остріе можетъ быть замѣнено роликомъ, слѣдъ оси котораго совпадаетъ съ концомъ острія. Въ такомъ случаѣ, очевидно, эксцентрикъ долженъ быть очерченъ кривой, параллельной данной и отстоящей отъ нея на величину радіуса ролика.

ОТДѢЛЪ 5-ый.

Сложные механизмы, состоящіе изъ зубчатыхъ колесъ.

75. Рядовое соединеніе. Пусть колесо *1* (фиг. 124), имѣющее z_1 зубцовъ и насаженное на ось o_1, зацѣпляется съ колесомъ *2*, имѣюшимъ Z_1 зубцовъ и насаженнымъ на ось o_2. Пусть далѣе на той же оси o_2 насажено колесо *3*, имѣющее z_2 зубцовъ и, въ свою очередь, зацѣпляющееся съ колесомъ *4*, имѣющимъ Z_2 зубцовъ и насаженнымъ на ось o_3 и т. д. Такое соединеніе зубчатыхъ колесъ и называется р я д о в ы м ъ.



фиг. 124 я.

Наша задача при изученіи этого рода механизмовъ будетъ состоять въ опредѣленіи отношенія между угловыми скоростями крайнихъ осей. Итакъ, пусть въ соединеніе входятъ $(n+1)$ осей. Обозначимъ ихъ угловыя скорости послѣдовательно черезъ $\omega_1, \omega_2 \dots . \omega_{n+1}$. Если при этомъ числа зубцовъ колесъ четнаго порядка будутъ соотвѣтственно Z_1, $Z_2 \dots . Z_n$, а числа зубцовъ колесъ нечетнаго порядка z_1, $z_2 \dots . z_n$, то,—на основаніи выведеннаго въ теоріи цилиндрическаго зацѣпленія положенія (§ 52), что угловыя скорости зацѣпляющихся колесъ обратно пропорціональны числамъ зубцовъ,—будемъ имѣть:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_1}{z_1};\ \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{Z_2}{z_2};\ \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{Z_3}{z_3} \ldots \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} = \frac{Z_n}{z_n}.$$

Перемножая всѣ эти равенства почленно, найдемъ:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_{n+1}} = \frac{Z_1.Z_2.Z_3 \ldots Z_n}{z_1.z_2.z_3 \ldots z_n} \ldots \ldots (1).$$

Отсюда мы видимъ, что отношеніе угловыхъ скоростей крайнихъ осей равняется отношенію произведенія чиселъ зубцовъ колесъ четнаго порядка къ произведенію чиселъ зубцовъ колесъ нечетнаго порядка.

Обратимъ вниманіе на направленіе вращеній крайнихъ осей. Замѣтимъ, что каждыя двѣ смежныя оси вращаются въ обратномъ направленіи, а взятыя черезъ одну—въ одномъ направленіи; поэтому всѣ четныя оси будутъ вращаться обратно первой, а всѣ нечетныя—одинаково съ ней.

Условимся считать k положительнымъ, когда крайнія оси вращаются въ одну сторону, и отрицательнымъ въ противномъ случаѣ; если мы введемъ во вторую часть формулы (*1*) множитель $(-1)^n$, то, очевидно, при четномъ числѣ осей получимъ для k отрицательное значеніе, а при нечетномъ—положительное.

Итакъ,

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_{n+1}} = (-1)^n \frac{Z_1.Z_2.Z_3 \ldots Z_n}{z_1.z_2.z_3 \ldots z_n} \ldots (2).$$

Если положимъ, что $Z_1 = Z_2 = Z_3 = \ldots = Z_n = Z$

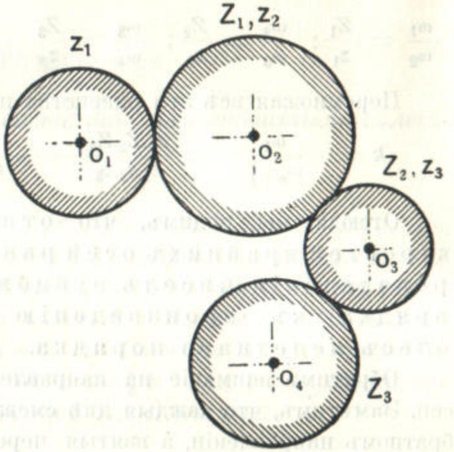
и $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots z_n = z$, то

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_{n+1}} = (-1)^n \left(\frac{Z}{z}\right)^n.$$

Для другого частнаго случая, когда $Z_1 = z_2$, $Z_2 = z_3$, $Z_3 = z_4 \ldots Z_{n-1} = z_n$, т. е. когда на каждой изъ осей имѣется только по одному колесу (фиг. 125), находимъ:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_{n+1}} = (-1)^n \frac{Z_n}{z_1},$$

т. е. въ такомъ случаѣ движеніе будетъ передаваться такъ какъ будто бы промежуточныхъ колесъ совсѣмъ не было. Промежуточныя колеса могутъ только мѣнять направленіе; такъ, напримѣръ, передачу вращенія между двумя осями въ одну сторону можно получить при помощи трехъ колесъ внѣшняго зацѣпленія.



фиг. 125-я.

Какъ мы видимъ, задача объ опредѣленіи k по даннымъ числамъ зубцовъ не представляетъ затрудненія. Гораздо сложнѣе обратная задача; именно, задача о построеніи рядового соединенія по данному k. Конечно, эта задача неопредѣленная; однако существуютъ нѣкоторыя ограниченія, которыя должны быть удовлетворены. Чѣмъ, напримѣръ, число осей меньше, тѣмъ лучше; но нельзя переходить и практически допустимыхъ maximum'а и minimum'а чиселъ зубцовъ. Ходъ рѣшенія задачи таковъ. Передаточное число k задается обыкновенно въ видѣ нѣкоторой дроби. Чтобы построить рядовое соединеніе, числителя и знаменателя этой дроби разлагаютъ на первоначальные множители:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega_{n+1}} = \frac{a_1 . a_2 . a_3 \, . \; . \; . \; . \, a_n}{b_1 . b_2 . b_3 \, . \; . \; . \; . \, b_n}.$$

Затѣмъ группируютъ эти множители и составляютъ отдѣльныя произведенія, положимъ такъ:

$$k = \frac{a_1 . a_2}{b_1} \; \frac{a_3}{b_2 . b_3} \; . \; . \; . \; . \; . \; ,$$

соображая число отдѣльныхъ множителей съ направленіемъ вращенія крайнихъ осей. Разъ такая группировка произведена, то можно полагать отдѣльные множители равными передаточнымъ числамъ отдѣльныхъ паръ зацѣпляющихся между собою колесъ:

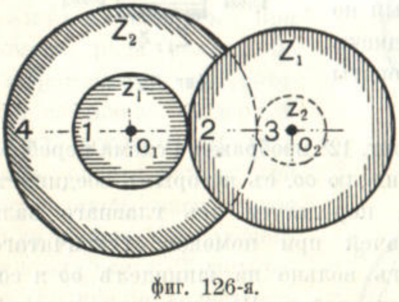
$$a_1 a_2 = Z_1,\ a_3 = Z_2 \ldots\ldots;\ b_1 = z_1,\ b_2 b_3 = z_2 \ldots$$

Если одинъ изъ множителей будетъ представлять большое и въ то же время первоначальное число (напр. 191), то точное рѣшеніе не всегда возможно, ибо иногда трудно выполнить одно колесо съ такимъ большимъ числомъ зубцовъ. Въ такомъ случаѣ довольствуются приблизительнымъ рѣшеніемъ. Для этого k разлагаютъ въ непрерывную дробь

$$k = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + 1 \ldots}}}$$

и вычисляютъ приближенныя дроби, каждая изъ которыхъ съ большею или меньшею степенью точности можетъ быть принята за данную, если только она удовлетворяетъ условію разложимости.

76. Возвратный рядъ. Пусть o_1 и o_2 (фиг. 126) оси, параллельныя между собою и перпендикулярныя къ плоскости чертежа. На каждую изъ осей насажено по два зубчатыхъ колеса, причемъ на оси o_2 оба колеса насажены крѣпко, а на оси o_1 одно изъ колесъ, положимъ *4*, сидитъ вольно. Движеніе отъ колеса *1*, насаженнаго на ось o_1, при помощи колесъ *2* и *3* передается колесу *4*, т. е. возвращается опять къ той же оси o_1. Поэтому такое соединеніе зубчатыхъ колесъ и называется **возвратнымъ рядомъ колесъ**.



фиг. 126-я.

Опредѣлимъ скорость вращенія колеса *1* относительно колеса 4.

Если обозначимъ угловую скорость колеса *1* черезъ ω_1, колеса 4 черезъ ω_4 и числа зубцовъ колесъ соотвѣтственно черезъ z_1, Z_1, z_2 и Z_2, то, на основаніи ур-ія (*1*) предыдущаго параграфа, найдемъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{Z_1.Z_2}{z_1.z_2} = \frac{n_1}{n_4} \ldots \ldots (1)$$

гдѣ n_1 и n_4 соотвѣтственныя числа оборотовъ колесъ 1-го и 4-го за одно и тоже время.

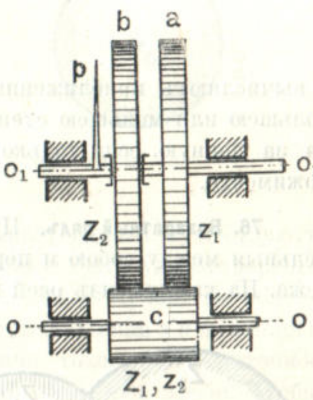
Примѣръ 1-ый. На чертежѣ 127-мъ представлена схема счетчика числа оборотовъ.

Колесо *b* сидитъ на оси o_1o_1 вольно, а колесо *a* и указатель *p*—крѣпко. Оба колеса *a* и *b* зацѣпляются съ однимъ колесомъ *c*, насаженнымъ на оси *oo*.

Полагая, что число зубцовъ на колесѣ $b = Z_2 = 100$, а на колесѣ $a = z_1 = 101$, на основаніи ур-ія (*1*) получимъ

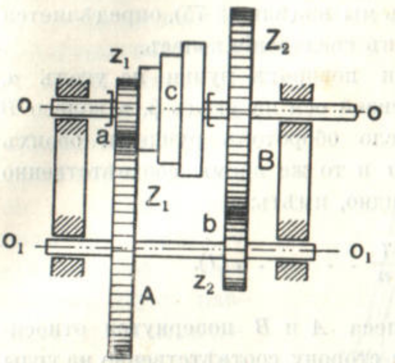
$$\frac{n_1}{n_4} = \frac{100}{101}, \text{ т. к. } Z_1 = z_2.$$

Откуда видно, что при одномъ оборотѣ колеса *a* колесо *b* опередитъ указатель на *0,01* своего оборота. Если поэтому мы присоединимъ къ колесу *b* раздѣленный по окружности на *100* частей дискъ то можемъ отсчитывать обороты оси o_1o_1 до ста.



фиг. 127-я.

Примѣръ 2-ой. На фиг. 128 изображена схема перебора самоточки. Движеніе къ шпинделю *oo*, съ которымъ соединяется обтачиваемый предметъ, передается отъ главнаго вала мастерской ременной передачей при помощи ступенчатаго шкива *c*. Этотъ шкивъ сидитъ вольно на шпинделѣ *oo* и составляетъ одно цѣлое съ шестерней *a*. На томъ же шпинделѣ *oo* насажено крѣпко зубчатое колесо *B*, которое въ случаѣ надобности, посредствомъ особаго приспособленія, можетъ соединяться со ступенчатымъ шкивомъ *c*. Если при этомъ ось o_1o_1, на которой крѣпко насажено зубчатое колесо *A*, зацѣпляющееся съ шестерней *a* и шестерня *b*, зацѣпляющаяся съ колесомъ *B*, отодвинута въ сторону (для чего опять имѣется особое приспособленie) такъ, что A и b выходятъ изъ зацѣпленiя съ a и B, то вращенie передается обтачиваемому предмету непосредственно отъ шкива c. Когда нужно сдѣлать вращенie болѣе медленнымъ, то, отцѣпивъ B отъ c, передвигаютъ ось o_1o_1 такъ, чтобы установилось зацѣпленie a съ A и b съ B. Обозначимъ угловую скорость вращенiя шкива c черезъ ω_0, числа зубцовъ на шестернѣ a черезъ z_1, на колесѣ A черезъ Z_1, на шестернѣ b—черезъ z_2 и на колесѣ B—черезъ Z_2; тогда угловая скорость шпинделя ω, на основанiи ур-iя (*1*), выразится такъ:

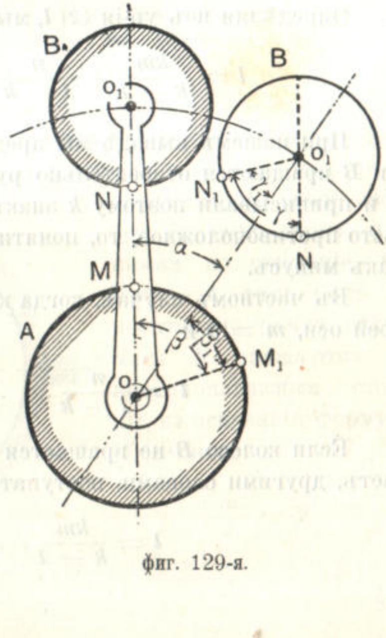


фиг. 128-я.

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{z_1.z_2}{Z_1.Z_2}.$$

Отсюда и видно, что если $z_1z_2 < Z_1Z_2$ то $\omega < \omega_0$.

77. Эпициклическое соединенie. Пусть колесо A (фиг. 129), называемое центральнымъ, при помощи ряда колесъ, не изображенныхъ на чертежѣ, соединено съ крайнимъ колесомъ B, причемъ опоры всѣхъ осей составляютъ одно цѣлое съ ручкой oo_1, вращающейся около оси o. Такого рода соединенie колесъ называется эпициклическимъ или планетнымъ, ибо такимъ соединенiемъ пользуются для воспроизведенiя движенiя планетъ.



фиг. 129-я.

Задача заключается въ установленіи соотношенія между числами оборотовъ колесъ A и B около ихъ осей и числомъ оборотовъ ручки при данномъ передаточномъ числѣ k между колесами B и A, которое, какъ мы видѣли (§ 75), опредѣляется по числу зубцовъ входящихъ въ соединеніе колесъ.

Предположимъ, что при поворотѣ ручки на уголъ α, колесо A повернется около своей оси на уголъ β, а колесо B —на уголъ γ. Обозначая число оборотовъ ручки и обоихъ колесъ около ихъ осей за одно и то же время соотвѣтственно черезъ l, m и n, будемъ, очевидно, имѣть:

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\beta}{m} = \frac{\gamma}{n} \ldots\ldots (1).$$

Если въ то же время колеса A и B повернутся относительно ручки въ одну и ту же сторону соотвѣтственно на углы β_1 и γ_1, то

$$k = \frac{\gamma_1}{\beta_1} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{n - l}{m - l} \ldots\ldots (2),$$

ибо легко видѣть, что

$$\gamma_1 = \gamma - \alpha \text{ и } \beta_1 = \beta - \alpha.$$

Опредѣляя изъ ур-ія (2) l, мы получимъ формулу Willis'а:

$$l = \frac{km}{k - 1} + \frac{n}{1 - k} \ldots\ldots (3).$$

При нашемъ выводѣ мы предположили, что оба колеса A и B вращаются относительно ручки въ одну и ту же сторону и приписывали поэтому k знакъ плюсъ; если будетъ имѣть мѣсто противоположное, то, понятно, k слѣдуетъ приписывать знакъ минусъ.

Въ частномъ случаѣ, когда колесо A не вращается около своей оси, $m = 0$ и

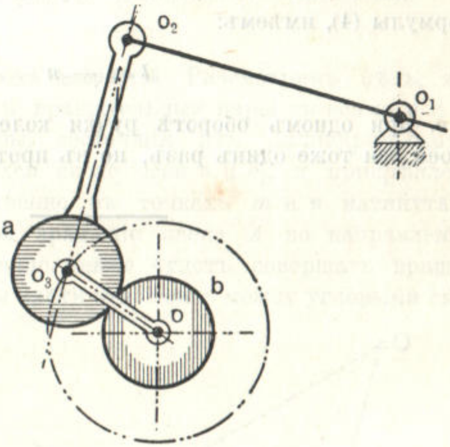
$$l = \frac{n}{1 - k} \ldots\ldots (4).$$

Если колесо B не вращается около своей оси, т. е. совершаетъ, другими словами, поступательное движеніе, $n = 0$ и

$$l = \frac{km}{k - 1} \ldots\ldots (5).$$

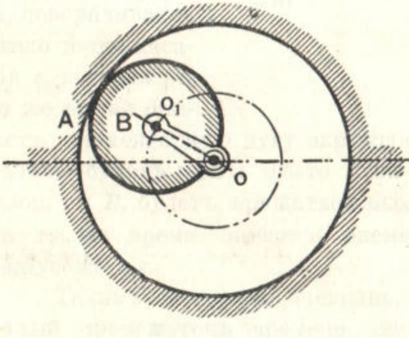
Примѣръ 1-ый. Планетный механизмъ Уатта (фиг. 130). Уаттъ примѣнилъ эпициклическое соединеніе для передачи движенія отъ коромысла паровой машины $o_1 o_2$ къ главному валу o; онъ не могъ воспользоваться для этой цѣли шатуннымъ механизмомъ, такъ какъ послѣдній былъ въ то время патентованъ.

Преобразованіе колебательнаго движенія коромысла $o_1 o_2$ во вращательное движеніе вала o производится при помощи двухъ равныхъ зубчатыхъ колесъ a и b, первое изъ которыхъ соединено неизмѣнно съ шатуномъ $o_2 o_3$, а второе крѣпко насажено на главномъ валу машины o. Оси колесъ соединены свободно вращающейся на нихъ ручкой oo_3.



Фиг. 130-ая.

Такъ какъ колесо a совершаетъ только колебательное движеніе, то за время полнаго колебанія коромысла оно не поворачивается около своей оси. Въ виду этого, принимая во вниманіе, что $k = -1$, такъ какъ относительно ручки колеса a и b вращаются въ противоположныя стороны, на основаніи формулы (5) имѣемъ:



фиг. 131-ая.

$$\frac{m}{l} = 2,$$

т. е. за время одного полнаго колебанія коромысла валъ o дѣлаетъ два оборота.

Примѣръ 2-ой. Механизмъ Лагира (фиг. 131). Здѣсь центральное неподвижное колесо A зацѣпляется внутреннимъ образомъ съ колесомъ B, имѣющимъ вдвое меньшій діаметръ. Оси колесъ соединены ручкой oo_1.

Такъ какъ въ данномъ случаѣ $k = 2$, то, на основаніи формулы (4), имѣемъ:

$$l = -n$$

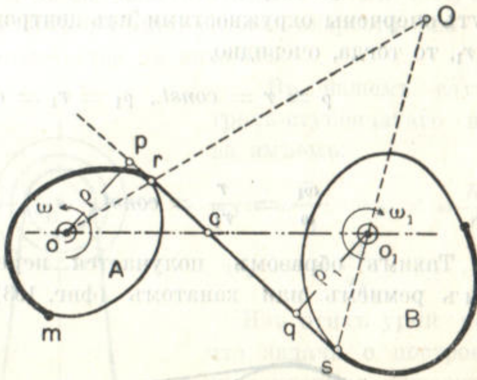
т. е. при одномъ оборотѣ ручки колесо B повернется около своей оси тоже одинъ разъ, но въ противоположную сторону.

ОТДѢЛЪ 6-ой.

Ременная и канатная передачи.

---

78. Отношеніе угловыхъ скоростей. Разсмотримъ цѣпь, заключающую въ себѣ двѣ вращательныя пары съ осями o и o_1 (фиг. 132) и двѣ пары, состоящія изъ цилиндрическихъ тѣлъ A и B, вращающихся около осей o и o_1, и прикрѣпленнаго къ нимъ соотвѣтственно въ точкахъ m и n натянутаго гибкаго тѣла mcn. При вращеніи звена A по направленію стрѣлки звено B, очевидно, также будетъ совершать вращательное движеніе. Чтобы найти отношеніе между угловыми скоростями звеньевъ A и B, замѣтимъ, что при поворотѣ звена A на безконечно малый уголъ по направленію стрѣлки гибкое тѣло, оставаясь натянутымъ, будетъ навиваться на A, поворачиваясь около точки касанія r, которая въ то же время опишетъ элементарную дугу окружности радіусомъ or. Такое же явленіе будетъ имѣть мѣсто и на звенѣ B: гибкое тѣло, свиваясь съ B, будетъ вращаться около точки касанія s, которая въ то же время опишетъ элементарную дугу окружности радіусомъ o_1s.



фиг. 132-ая.

Такимъ образомъ, очевидно, что за всякій безконечно малый промежутокъ времени движеніе въ разсматриваемой цѣпи будетъ передаваться такъ, какъ будто бы четыреугольникъ $orso_1$ представлялъ собою четырехъ-звенный шарнирный четыреугольникъ (§ 28). На этомъ основаніи:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{oc}{o_1c} = \frac{\rho}{\rho_1} \ldots\ldots (1)$$

гдѣ ρ и ρ_1 обозначаютъ длины перпендикуляровъ op и o_1q, опущенныхъ изъ o и o_1 на направленіе rs.

Мы видимъ, что и здѣсь имѣетъ мѣсто законъ Willis'a: линія дѣйствія дѣлитъ линію центровъ на части, обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ.

Ур-іе (*1*) можно было бы вывести и непосредственно, разсматривая движеніе за безконечно малый промежутокъ времени отрѣзка гибкаго тѣла rs. Понятно, что ур-іе (*1*) имѣетъ мѣсто и тогда, когда точка c лежитъ внѣ центровъ вращенія; въ этомъ послѣднемъ случаѣ звенья A и B будутъ вращаться въ одну сторону.

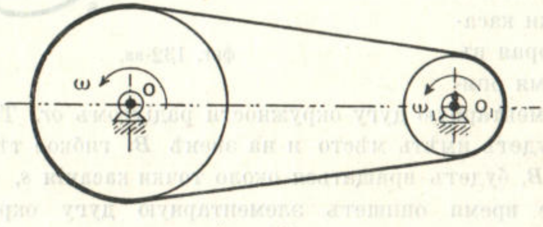
79. Отношеніе скоростей постоянно. Если звенья A и B (фиг. 132) будутъ очерчены окружностями изъ центровъ o и o_1 радіусами r и r_1, то тогда, очевидно,

$$\rho = r = const., \quad \rho_1 = r_1 = const.$$

и

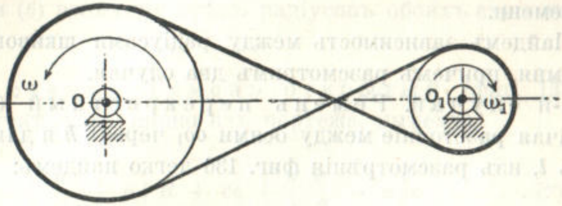
$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1} = const. \ldots\ldots (1).$$

Такимъ образомъ получается передача съ открытымъ ремнемъ или канатомъ (фиг. 133) и перекрестнымъ ремнемъ (фиг. 134); передача съ перекрестнымъ канатомъ не примѣняется, въ виду сильнаго истиранія каната.



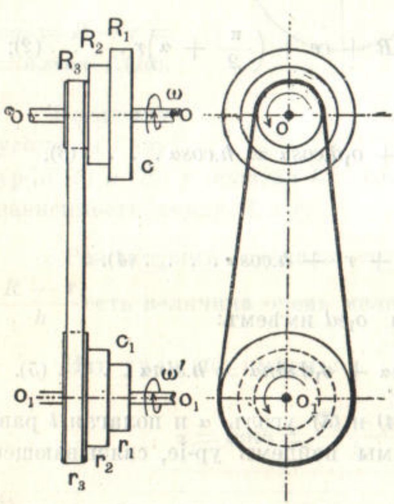
фиг. 133-ая.

Въ первомъ случаѣ оба цилиндра, которые называются въ ременной передачѣ шкивами, а въ канатной—блоками, вращаются въ одну сторону, а во второмъ—въ разныя.



фиг. 134-ая.

80. Ременная передача съ перемѣннымъ отношенiемъ скоростей. Измѣненiе отношенiя скоростей въ ременной передачѣ достигается при помощи ступенчатыхъ шкивовъ c и c_1 (фиг. 135) Очевидно, что если ось oo вращается равномѣрно, то надѣвая ремень на различныя пары шкивовъ, мы можемъ получить столько различныхъ значенiй для угловой скорости оси o_1o_1, сколько ступеней заключается въ шкивахъ.



фиг. 135-ая.

Въ нашемъ случаѣ трехъ-ступенчатаго шкива имѣемъ:

$$\omega'_1 = \omega\frac{R_1}{r_1},\quad \omega'_2 = \omega\frac{R_2}{r_2} \text{ и}$$

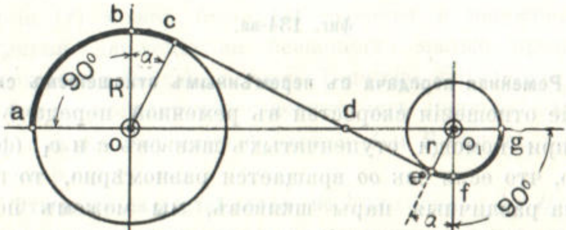
$$\omega'_3 = \omega\frac{R_3}{r_3} \quad . \; . \; . \; . \; (1).$$

Изъ этихъ ур-iй ясно, что задача о построенiи ступенчатыхъ шкивовъ по даннымъ величинамъ ω и ω' является неопредѣленной, такъ что радiусы одного изъ ступенчатыхъ шкивовъ можно выбирать совершенно произвольно. Въ виду этого оказывается возможнымъ поставить требованiе, чтобы ремень, на какую бы онъ ни былъ надѣтъ пару шкивовъ, имѣлъ постоянную длину.

Такое требованіе вполнѣ раціонально, такъ какъ въ противномъ случаѣ при перестановкѣ ремня съ одной пары шкивовъ на другую необходимо было бы его расшивать и затѣмъ опять сшивать, что сопряжено съ значительной потерей времени.

Найдемъ зависимость между радіусами шкивовъ и длиной ремня, причемъ разсмотримъ два случая.

1-й случай. Ремень перекрестный (фиг. 136). Обозначая разстояніе между осями oo_1 черезъ h и длину ремня черезъ l, изъ разсмотрѣнія фиг. 136 легко найдемъ:



фиг. 136-ая.

$$\frac{l}{2} = abcdefg = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) R + ce + \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) r \; . \; . \; . \; (2);$$

но

$$ce = cd + de = od.\cos\alpha + o_1d.\cos\alpha = h.\cos\alpha \; . \; . \; . \; . \; (3),$$

такъ что

$$\frac{l}{2} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)(R + r) + h.\cos\alpha \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Далѣе, изъ $\triangle\triangle$ ocd и o_1ed имѣемъ:

$$oc + o_1e = R + r = od.\sin\alpha + o_1d.\sin\alpha = h.\sin\alpha \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Исключая изъ ур-ій *(4)* и *(5)* уголъ α и полагая l равнымъ постоянной величинѣ, мы найдемъ ур-іе, связывающее R и r.

Но легко непосредственно убѣдиться, что ур-ія *(4)* и *(5)* при $l = const.$ удовлетворяются положеніемъ:

$$R + r = const. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6),$$

такъ что въ случаѣ перекрестнаго ремня при $l = const.$ сумма радіусовъ парныхъ шкивовъ должна быть также величиной постоянной. Выбирая значеніе постоянной въ ур-іи (*6*) произвольно, мы легко найдемъ изъ ур-ій (*1*) и (*6*) величину всѣхъ радіусовъ обоихъ ступенчатыхъ шкивовъ.

2-й случай. Ремень открытый (фиг. 137). Въ этомъ случаѣ, какъ видно изъ чертежа, имѣемъ:

$$\frac{l}{2} = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) R + ce + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) r \; . \; . \; . \; . \; . \; (7);$$

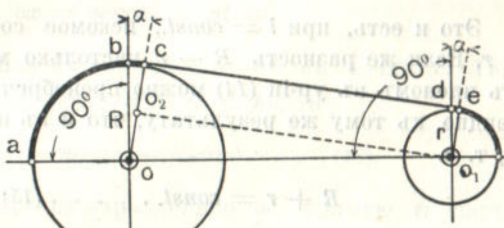
$$ce = o_1 o_2 = h.\cos\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; (8),$$

такъ что

$$\frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}(R + r) + \alpha(R - r) + h.\cos\alpha \; . \; . \; . \; (9)$$

и

$$oo_2 = R - r = h.\sin\alpha \; . \; . \; . \; (10).$$



фиг. 137-ая.

Исключая уголъ α изъ ур-ій (*9*) и (*10*) и полагая $l = const.$, мы и найдемъ искомую зависимость между R и r.

Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда отношеніе $\frac{R - r}{h}$ есть величина очень малая.

Изъ ур-ія (*10*) имѣемъ:

$$\alpha = \sin\alpha = \frac{R - r}{h} \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

и

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{R - r}{h}\right)^2} \; . \; . \; . \; . \; (12).$$

Разлагая выраженіе (*12*) по строкѣ Ньютона и откидивая члены, содержащіе отношеніе $\frac{R-r}{h}$ въ степени, выше второй, получимъ:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (13).$$

Подставляя выраженія для α и $\cos\alpha$ въ ур-іе (*9*), найдемъ:

$$l = \pi(R+r) + \frac{2(R-r)^2}{h} + 2h - \frac{(R-r)^2}{h}$$

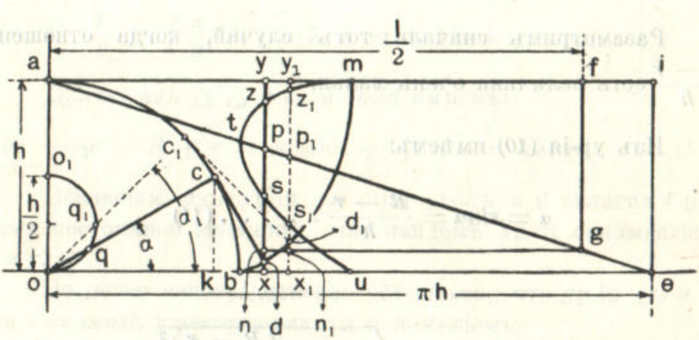
или

$$l = \pi(R+r) + 2h + \frac{(R-r)^2}{h} \; . \; . \; . \; . \; . \; (14).$$

Это и есть, при $l = const.$, искомое соотношеніе между R и r. Если же разность $R - r$ настолько мала, что послѣднимъ членомъ въ ур-іи (*14*) можно пренебречь, мы приходимъ, очевидно, къ тому же результату, что и въ предыдущемъ случаѣ, т. е.

$$R + r = const. \; . \; . \; . \; . \; . \; (15).$$

Точное рѣшеніе задачи о нахожденіи радіусовъ ступенчатыхъ шкивовъ при постояннной длинѣ ремня по ур-іямъ (*9*) и (*10*) при заданныхъ отношеніяхъ угловыхъ скоростей возможно лишь при помощи попытокъ. Рѣшеніе однако же значительно облегчается, если воспользоваться діаграммой Reuleaux (фиг. 138).



фиг. 138-ая

Изъ ур-ій (*9*) и (*10*) легко находимъ:

$$R = \frac{l}{2\pi} - \frac{h}{\pi}(\cos\alpha + \alpha.\sin\alpha) + \frac{h.\sin\alpha}{2} \;.\;.\;.\;.\;.\;(16)$$

и

$$r = \frac{l}{2\pi} - \frac{h}{\pi}(\cos\alpha + \alpha.\sin\alpha) - \frac{h.\sin\alpha}{2} \;.\;.\;.\;.\;(17).$$

Возьмемъ прямоугольныя оси oa и oe и отложимъ $oa = h$ и $oe = \pi h$. Изъ центра o проведемъ радіусомъ h четверть окружности acb и построимъ ея развертку bdm.

Если мы возьмемъ на разверткѣ какую нибудь точку d и спроектируемъ ее на ось oe въ точку x, то

$$ox = oc.\cos\alpha + cd.\sin\alpha,$$

гдѣ cd — касательная къ окружности acb въ точкѣ c. Такъ какъ по свойству развертки $cd = \breve{cb} = h\alpha$, то

$$ay = ox = h(\cos\alpha + \alpha.\sin\alpha) \;.\;.\;.\;.\;(18).$$

Проведя прямую ai параллельно oe, прямую ei параллельно oa и соединивъ a и e прямою oe, изъ подобія треугольниковъ aie и ayp легко найдемъ:

$$yp = ay.\frac{ei}{ai} = \frac{h}{\pi}(\cos\alpha + \alpha.\sin\alpha) \;\;.\;.\;.\;.\;(19).$$

Если мы отложимъ $af = \frac{l}{2}$ и проведемъ прямыя fg и gn соотвѣтственно параллельно oa и oe, то изъ подобія треугольниковъ aie и afg получимъ:

$$yn = fg = \frac{l}{2\pi} \;.\;.\;.\;.\;.\;(20),$$

такъ что

$$pn = yn - yp = \frac{l}{2\pi} - h(\cos\alpha + \alpha.\sin\alpha) \;.\;.\;.\;(21).$$

Если, наконецъ, мы проведемъ полуокружность oqo_1 радіусомъ $\frac{h}{4}$, то, очевидно, отсѣчемъ ею на oc отрѣзокъ

$oq = \frac{h}{2} sin\alpha$. Откладывая отъ точки p вверхъ и внизъ длины pz и ps, равныя oq, получимъ:

$$nz = R, \ \ ns = r \ \ \text{и} \ \ sz = R - r,$$

что ясно изъ ур-ій *(16)* и *(17)*.

Совершая такое же построеніе для какого нибудь другого угла α_1, мы найдемъ:

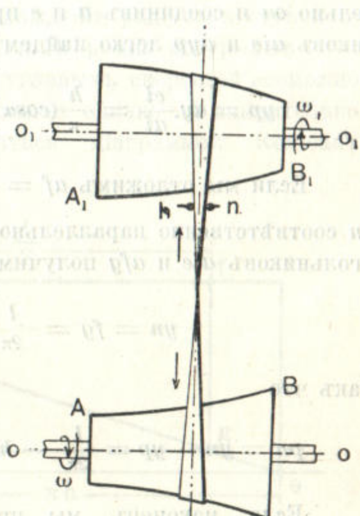
$$R_1 = n_1 z_1 \ \ \text{и} \ \ r_1 = s_1 n_1.$$

Геометрическое мѣсто точекъ z и s представитъ собою кривую *mztsu*.

При помощи діаграммы Reuleaux задача о построеніи ступенчатаго шкива для открытаго ремня можетъ быть разрѣшена въ слѣдующемъ порядкѣ.

Выбираемъ одинъ радіусъ R_1 или r_1 произвольно, а затѣмъ по первому изъ ур-ій *(1)* опредѣляемъ другой. Далѣе, по ур-ію *(9)* по данному h и по найденнымъ R_1 и r_1 опредѣлимъ l и строимъ діаграмму Reuleaux. Проводя въ ней линіи xy, x_1y_1 и т. д. такъ, чтобы отрѣзки nz и ns удовлетворяли послѣдовательно ур-іямъ *(1)*, мы найдемъ радіусы R_2, R_3..r_2, r_3.. и т. д.

81. Ременная передача съ непрерывнымъ измѣненіемъ отношенія скоростей. При ступенчатыхъ шкивахъ отношеніе скоростей измѣняется скачками. Если разность между радіусами смежныхъ шкивовъ одного и того же ступенчатаго шкива сдѣлать безконечно малою и число шкивовъ безконечно большимъ, то получатся два барабана (фиг. 139), одинъ изъ которыхъ образуется вращеніемъ около оси oo кривой AB, а другой—около оси o_1o_1 кривой A_1B_1. Въ этомъ случаѣ, очевидно, при передвиженіи ремня перпендикулярно къ плоскости вращенія от-

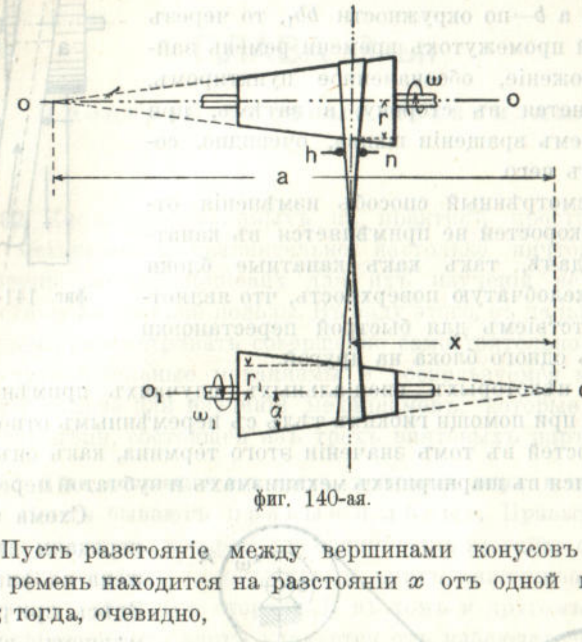


фиг. 139-ая.

ношеніе угловыхъ скоростей будетъ измѣняться непрерывно по закону, который опредѣляется видомъ кривыхъ AB и A_1B_1.

Въ случаѣ перекрестнаго ремня кривыя AB и A_1B_1, при сближеніи барабановъ до соприкосновенія, должны совпадать между собою.

Для примѣра разсмотримъ два одинаковыхъ коническихъ барабана (фиг. 140).



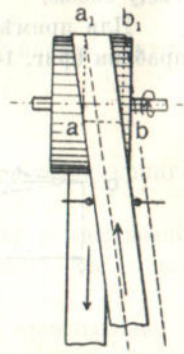
фиг. 140-ая.

Пусть разстояніе между вершинами конусовъ $= a$ и пусть ремень находится на разстояніи x отъ одной изъ вершинъ; тогда, очевидно,

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1} = \frac{(a-x)tg\alpha}{x.tg\alpha} = \frac{a-x}{x}.$$

Въ то время какъ при ступенчатыхъ шкивахъ для перестановки ремня необходимо остановить механизмъ, здѣсь ремень можетъ быть переставленъ во время хода нажатіемъ вилкой hn (фиг. 140) сбоку на набѣгающую часть ремня на тотъ шкивъ, около котораго вилка находится.

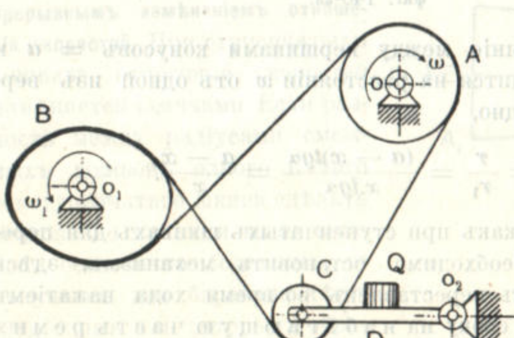
Ремень удерживается на шкивѣ треніемъ и потому требуется всегда значительное усиліе, чтобы сдвинуть его со шкива во время хода, если нажимать на сбѣгающую часть. Напротивъ, онъ тотчасъ же соскочитъ со шкива, если даже легко нажать на набѣгающую часть. Объясняется это слѣдующимъ образомъ. Пусть средняя линія набѣгающей части ремня (фиг. 141) не лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси шкива, и ремень при набѣганіи соприкасается со шкивомъ по образующей *ab*. Такъ какъ, вслѣдствіе тренія между ремнемъ и шкивомъ, точка *a* ремня будетъ далѣе двигаться по окружности aa_1, а *b*—по окружности bb_1, то черезъ небольшой промежутокъ времени ремень займетъ положеніе, обозначенное пунктиромъ, т. е. сдвинется въ сторону, а затѣмъ, при дальнѣйшемъ вращеніи шкива, очевидно, соскочитъ съ него.



фиг. 141-ая.

Разсмотрѣнный способъ измѣненія отношенія скоростей не примѣняется въ канатной передачѣ, такъ какъ канатные блоки имѣютъ желобчатую поверхность, что является препятствіемъ для быстрой перестановки каната съ одного блока на другой.

Въ нѣкоторыхъ спеціальныхъ случаяхъ примѣняется передача при помощи гибкихъ тѣлъ съ перемѣннымъ отношеніемъ скоростей въ томъ значеніи этого термина, какъ онъ разсматривался въ шарнирныхъ механизмахъ и зубчатой передачѣ. Схема такой передачи изображена на фиг. 142. Здѣсь, при равномѣрномъ вращеніи цилиндрическаго шкива или блока *A*, блокъ или шкивъ *B* будетъ вращаться съ перемѣнной скоростью. Гибкое тѣло охватываетъ направляющій блокъ или шкивъ *c* и при помощи груза *Q* всегда находится въ натянутомъ состояніи.



фиг 142-ая.

ГЛАВА 3-ья

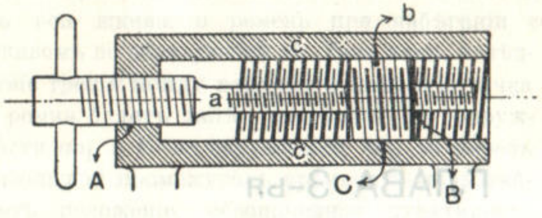
Пространственные механизмы.

82. Число примѣняемыхъ на практикѣ пространственныхъ механизмовъ сравнительно настолько ничтожно, что примѣненіе метода Reuleaux для ихъ изученія не можетъ принести существенной пользы. Въ виду этого, въ дальнѣйшемъ мы будемъ разсматривать совершенно самостоятельно отдѣльные употребительные механизмы и воспользуемся методомъ Reuleaux только для изученія механизмовъ, которые получаются изъ цѣпи, состоящей изъ трехъ винтовыхъ паръ.

83. Цѣпь, состоящая изъ трехъ винтовыхъ паръ, и ея преобразованія. Винты бываютъ правые и лѣвые. Правыми называются такіе винты, которые для ввинчиванія въ гайку слѣдуетъ вращать по стрѣлкѣ часовъ; лѣвый винтъ завинчивается при вращеніи въ обратную сторону. И въ томъ и другомъ случаѣ предполагается, что винтъ удаляется отъ наблюдателя. Чтобы различать правый и лѣвый винтъ аналитически, можно условно считать шагъ праваго винта положительнымъ, а шагъ лѣваго —отрицательнымъ. Далѣе, если мы примемъ направленія движеній поступательнаго и вращательнаго, соотвѣтствующихъ ввинчиванію праваго винта, за положительныя, то, очевидно, оба отрицательныя перемѣщенія будутъ соотвѣтствовать вывинчиванію того же винта, положительное поступательное перемѣщеніе съ отрицательнымъ вращательнымъ—ввинчиванію лѣваго винта и, наконецъ, отрицательное поступательное и положительное вращательное—вывинчиванію лѣваго винта.

Возьмемъ цѣпь, состоящую изъ трехъ соосныхъ винтовыхъ паръ (фиг. 143) A, B и C и трехъ звеньевъ a, b, и c.

Предполагая, что всѣ три винта имѣютъ правую нарѣзку, обозначимъ шагъ пары A черезъ x, пары B—черезъ y и пары C—черезъ z и будемъ изслѣдовать тотъ механизмъ, который мы получимъ, сдѣлавъ стойкой звено c.



фиг. 143-я.

Задача въ данномъ случаѣ, какъ и вообще, заключается въ опредѣленіи зависимости между движеніемъ звеньевъ, прилегающихъ къ стойкѣ c въ томъ предположеніи, что одно изъ нихъ, звено ведущее, движется какъ-нибудь произвольно, но опредѣленнымъ въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ образомъ.

Предполагая, что ведущимъ является звено a, допустимъ, что мы повернули его по стрѣлкѣ часовъ на α оборотовъ, вслѣдствіе чего оно перемѣстилось поступательно на величину αx. Если бы $x = y$, то звено b оставалось бы неподвижнымъ, но въ общемъ случаѣ оно будетъ также перемѣщаться. Понятно, что сумма перемѣщеній звена a относительно b и b относительно c равна перемѣщенію звена a относительно c.

Предположимъ, что звено a повернулось относительно b на β оборотовъ и b относительно c на γ оборотовъ; тогда, считая, что β и γ положительны (легко сообразить, что такъ будетъ въ томъ случаѣ, если $x > y$), будемъ имѣть:

$$\alpha = \beta + \gamma \dots\dots\dots (1);$$

$$\alpha x = \beta y + \gamma z \dots\dots (2).$$

Изъ этихъ двухъ ур-ій, при данныхъ x, y, z и α, мы можемъ найти β и γ.

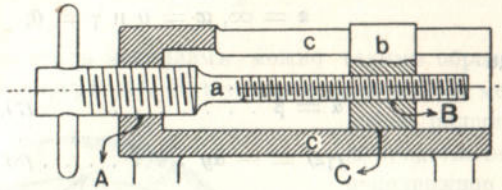
Замѣтимъ, что въ такомъ общемъ видѣ этотъ механизмъ не имѣетъ почти никакого практическаго примѣненія; гораздо чаще встрѣчаются его видоизмѣненія, когда какая-либо изъ винтовыхъ паръ обращается или въ поступательную, или во вращательную. И ту и другую пару можно разсматривать какъ частный случай винтовой, причемъ шагъ первой надо считать равнымъ безконечно большой величинѣ, а шагъ второй —нулю.

Предположимъ, что винтовая пара c обращается въ поступательную (фиг. 144). Для этого случая надо положить въ ур-іяхъ (*1*) и (*2*)

$z = \infty$ и $\gamma = 0$;

Тогда будемъ имѣть:

$\alpha = \beta$ . . . (*3*)



фиг. 144-я.

и

$(\gamma z) =$ поступат. перемѣщеніе звена $b = \alpha(x - y)$ . . . . (*4*).

Если оба винта одноименны, то, уменьшая разность $(x-y)$, можно сдѣлать перемѣщеніе звена b сколь угодно малымъ. Такого рода соотношенія выполнены въ дифференціальномъ винтѣ Prony, который примѣняется для точныхъ установокъ въ астрономическихъ и физическихъ инструментахъ.

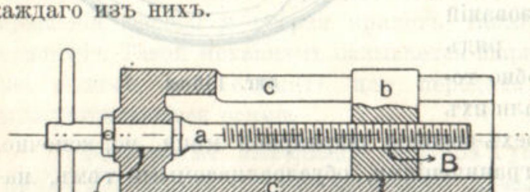
Если винтъ пары B имѣетъ лѣвую нарѣзку, то

$$(\gamma z) = \alpha(x + y) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Въ томъ случаѣ, когда x и y равны по абсолютной величинѣ

$$(\gamma z) = 2\alpha x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

Въ такомъ видѣ этотъ механизмъ примѣняется для соединенія вагоновъ съ цѣлью болѣе быстраго ихъ сцѣпленія, ибо при одномъ оборотѣ винта a, вагоны сближаются на двойную величину его поступательнаго перемѣщенія относительно каждаго изъ нихъ.



фиг. 145-я.

Положимъ теперь, что въ предыдущемъ механизмѣ пара A обратилась въ пару вращательную. При такомъ преобразованіи получимъ весьма распространенный механизмъ, въ которомъ винтъ *a* (фиг. 145), вращаясь въ *c*, будетъ сообщать поступательное движеніе гайкѣ *b*. Чтобы примѣнить къ данному случаю ур-ія *(1)* и *(2)*, мы должны положить въ нихъ

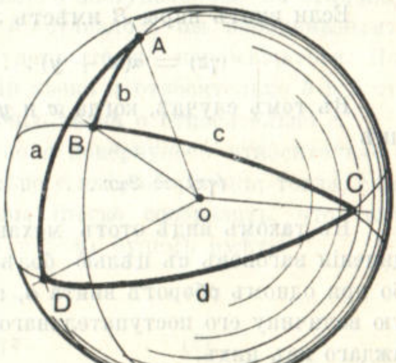
$$z = \infty,\ x = 0 \text{ и } \gamma = 0;$$

тогда

$$\alpha = \beta \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . (7).$$

$$(\gamma z) = -\alpha y \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . (8).$$

84. Шарниръ Гука. Шарниръ Гука есть частный случай сферической четырехъ-звенной шарнирной цѣпи. Эту цѣпь мы можемъ разсматривать, какъ обобщеніе плоской шарнирной цѣпи, предположивъ, что всѣ оси шарнировъ пересѣкаются въ одной точкѣ *o* (фиг. 146). Опишемъ изъ этой точки сферу. Пусть она пересѣчетъ оси въ точкахъ *A*, *B*, *C* и *D*, которыя мы соединимъ дугами большого круга *a*, *b*, *c* и *d*. Если мы выполнимъ эти дуги въ видѣ стержней и сочленимъ ихъ между собой шарнирами *A*, *B*, *C* и *D*, оси которыхъ будутъ совпадать съ линіями *oA*, *oB*, *oC* а *oD*, то получимъ четырехъ-звенную сферическую шарнирную цѣпь. Дѣлая въ ней неподвижнымъ то или другое звено, мы можемъ получить изъ нея четыре различныхъ механизма. Изъ такой цѣпи можно было бы при помощи преобразованій получить цѣлый рядъ механизмовъ, подобно тому какъ мы получали ихъ изъ плоской четырехъ-звенной шарнирной цѣпи, но, конечно, съ нѣкоторыми ограниченіями, обусловливаемыми тѣмъ, насколько мы можемъ движеніе фигуры изъ плоскости перенести на сферу. Между различными механизмами, получаемыми изъ сферической четырехъ-звенной шарнирной цѣпи, особеннаго

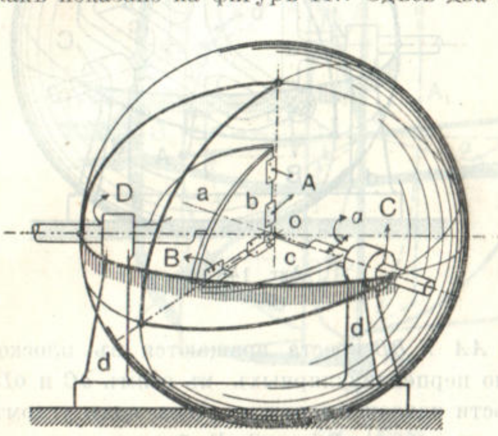


фиг. 146-ая.

вниманія заслуживаетъ тотъ, въ которомъ всѣ три подвижныхъ звена стягиваютъ прямые углы, т. е.

$$\breve{a} = \breve{b} = \breve{c} = \frac{\pi}{2} oA.$$

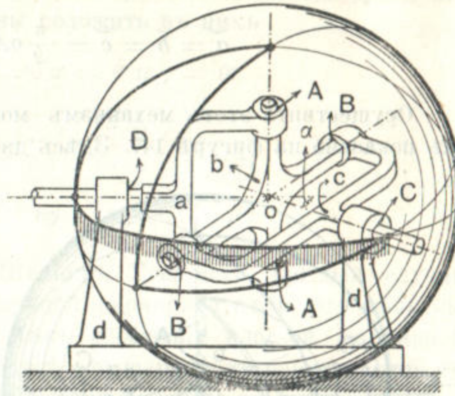
Осуществить этотъ механизмъ можно такимъ образомъ, какъ показано на фигурѣ 147. Здѣсь два соединенныхъ между собою подшипника представляютъ неподвижное звено d съ двумя элементами вращательныхъ паръ C и D. Звенья a и c выполнены въ видѣ секторовъ, соединенныхъ соотвѣтственно съ валами oD и oC, а звено b представляетъ собою просто секторъ, сочлененный съ секторами звеньевъ a и c при помощи петель. Всѣ три сектора имѣютъ въ вершинѣ прямой уголъ. Каждое изъ звеньевъ a, b и c заключаетъ въ себѣ по два элемента вращательныхъ паръ: звено a—пары D и A, звено b—пары A и B и звено c—пары B и C.



фиг. 147-ая.

Если мы будемъ вращать ось oD, то она при помощи сектора b увлечетъ во вращеніе ось oC; при непрерывномъ вращеніи первой и вторая придетъ также въ непрерывное вращеніе. Такой механизмъ называется шарниромъ Гука. Какъ мы видимъ, онъ служитъ для передачи вращенія между пересѣкающимися осями.

Практическое выполненіе шарнира Гука нѣсколько отличается отъ только что разсмотрѣнной схемы. Каждый изъ валовъ снабжается на концѣ вилкой съ двумя втулками; при этомъ вилки располагаются такъ (фиг. 148), что оси втулокъ, будучи перпендикулярными къ осямъ соотвѣтствующихъ валовъ, пересѣкаются между собою подъ прямымъ угломъ въ той же точкѣ o, гдѣ и оси валовъ. Въ эти втулки вилокъ вставляется одинъ общій крестъ $AABB$, который и представляетъ собою промежуточное звено b. Замѣтимъ, что при вращеніи валовъ крестъ не скользитъ во втулкахъ, а только вращается, ибо, какъ мы видѣли, пары A и B—вращательныя пары.

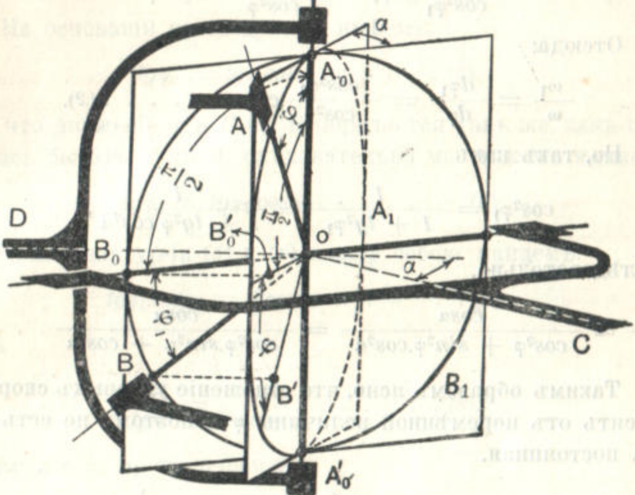


фиг. 148-ая.

Выведемъ теперь законъ передачи движенія. Не трудно видѣть, что стержни AA и BB креста вращаются въ плоскостяхъ, соотвѣтственно перпендикулярныхъ къ осямъ oC и oD, причемъ эти плоскости наклонены между собою подъ угломъ α, равномъ углу между осями oD и oC. Выберемъ на осяхъ AA и BB креста одинаково удаленныя отъ центра o точки и предположимъ, что описываемыя этими точками въ соотвѣтствующихъ плоскостяхъ окружности въ перспективѣ изображаются пересѣкающимися въ точкахъ A_0 и A'_0 кривыми $A_0AA'_0A_1$ и $A_0B_0A'_0B_1$ (фиг. 149), причемъ очевидно, что $A_0A'_0$ есть линія пересѣченія плоскостей, перпендикулярныхъ къ oD и oC. Допустимъ, что въ начальный моментъ стержень AA занимаетъ положеніе oA_0, а стержень BB — положеніе oB_0. Проекція oB'_0 стержня oB_0 на плоскость $A_0AA'_0A_1$ образуетъ съ oA_0 прямой уголъ, ибо $\angle A_0oB_0 = \frac{\pi}{2}$ и одна сторона этого угла лежитъ въ плоскости проекціи.

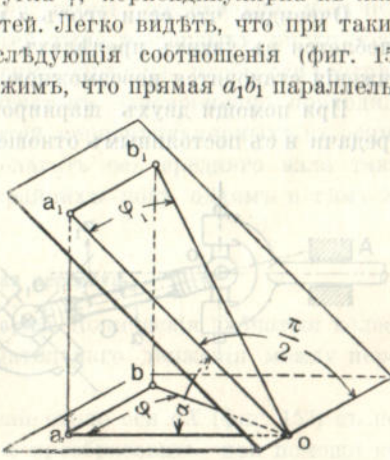
Предположимъ теперь, что стержень oA_0, повернувшись на уголъ φ, занялъ положеніе oA, а стержень oB_0, повернувшись въ то же время на уголъ φ_1, занялъ положеніе oB. Такъ какъ $\angle AoB$ проектируется на плоскость $A_0AA'_0A_1$ въ видѣ прямого угла, то, очевидно, уголъ между oB'_0 и oB', проекціей oB, равенъ φ.

Такимъ образомъ, уголъ φ есть проекція угла φ_1 на плоскость, образующую съ плоскостью послѣдняго уголъ α,



фиг. 149-ая.

причемъ одна изъ сторонъ угла φ, перпендикулярна къ линіи пересѣченія обѣихъ плоскостей. Легко видѣть, что при такихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія (фиг. 150), если для простоты мы положимъ, что прямая a_1b_1 параллельна линіи пересѣченія плоскостей угловъ φ и φ_1,



фиг. 150-ая.

$$ab = a_1b_1, \quad \frac{a_1b_1}{oa_1} = tg\varphi_1$$

и $\dfrac{ab}{oa} = tg\varphi$,

откуда

$$tg\varphi_1 = tg\varphi.cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Отъ этой зависимости между углами посредствомъ дифференцированія переходимъ къ скоростямъ; тогда законъ передачи движенія найдется такимъ путемъ:

$$\frac{1}{cos^2\varphi_1}d\varphi_1 = \frac{1}{cos^2\varphi}cos\alpha.d\varphi.$$

Отсюда:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \frac{cos^2\varphi_1}{cos^2\varphi}cos\alpha \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Но, такъ какъ

$$cos^2\varphi_1 = \frac{1}{1+tg^2\varphi_1} = \frac{1}{1+tg^2\varphi.cos^2\alpha},$$

то, слѣдовательно,

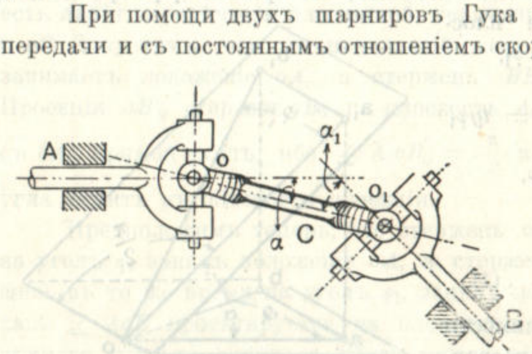
$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{cos\alpha}{cos^2\varphi + sin^2\varphi.cos^2\alpha} = \frac{cos\alpha}{cos^2\varphi.sin^2\alpha + cos^2\alpha} \ . \ . \ . \ (3).$$

Такимъ образомъ ясно, что отношеніе угловыхъ скоростей зависитъ отъ перемѣнной величины φ и поэтому не есть величина постоянная.

$$\left.\begin{aligned} &\text{При } \varphi=0^\circ \text{ и } \varphi=180^\circ\ldots\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{min.}=cos\alpha \\ &\text{При } \varphi=90^\circ \text{ и } \varphi=270^\circ\ldots\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)_{max.}=\frac{1}{cos\alpha} \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4).$$

Очевидно, что если уголъ α не великъ, то это отношеніе колеблется въ узкихъ предѣлахъ, а если $\alpha = 90^\circ$, то передача движенія становится невозможною.

При помощи двухъ шарнировъ Гука можно достигнуть передачи и съ постояннымъ отношеніемъ скоростей. Положимъ, что между двумя валами A и B (фиг. 151), оси которыхъ находятся въ одной плоскости, помѣщается третій валъ C, причемъ вилки первыхъ двухъ расположены въ начальный



фиг. 151-ая.

моментъ въ одной и той же плоскости, а вилки послѣдняго въ плоскости перпендикулярной. Обозначимъ синхроническіе углы поворота валовъ соотвѣтственно черезъ φ, φ_1 и φ_0, уголъ между осями валовъ A и C черезъ α иуголъ между осями B и C—черезъ α_1.

На основаніи предыдущаго имѣемъ:

$$tg\varphi_0 = tg\varphi.cos\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Ясно, что движеніе отъ C къ B передается такъ же, какъ передавалась бы отъ C къ A; слѣдовательно мы можемъ написать:

$$tg\varphi_0 = tg\varphi_1.cos\alpha_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

Сравнивая ур-ія (5) и (6) между собою, найдемъ:

$$tg\varphi_1.cos\alpha_1 = tg\varphi.cos\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; (7),$$

откуда

$$\frac{tg\varphi_1}{tg\varphi} = \frac{cos\alpha}{cos\alpha_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8).$$

Если $\alpha = \alpha_1$, то, очевидно,

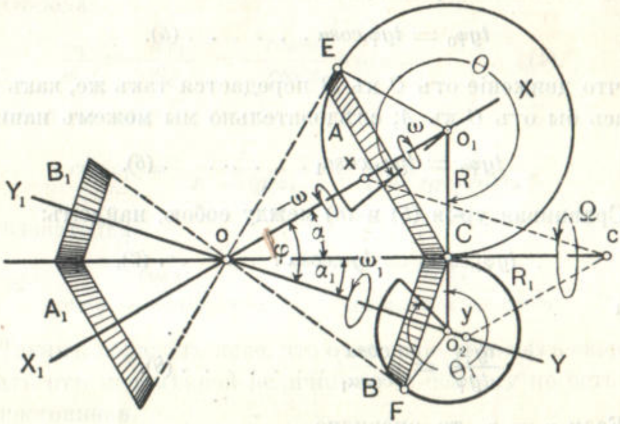
$$\frac{\omega_1}{\omega} = 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

Понятно, что при помощи двухъ шарнировъ Гука возможно передавать вращательное движеніе и между осями непересѣкающимися. Если при этомъ желательно получить постоянное отношеніе скоростей, надо, во-первыхъ, вилки крайнихъ валовъ располагать такимъ образомъ, чтобы оси соотвѣтствуюшихъ имъ стержней крестовъ одновременно приходили на линіи пересѣченія плоскостей, перпендикулярныхъ къ осямъ валовъ, и, во-вторыхъ, располагать ось средняго вала такъ, чтобы она пересѣкала оси крайнихъ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.

Зубчатая передача.

85. Коническія зубчатыя колеса. Коническія зубчатыя колеса служатъ для передачи вращательнаго движенія между пересѣкающимися осями.

Пусть требуется вращеніе около оси oX (фиг. 152) съ постоянной угловой скоростью ω преобразовать, при помощи непосредственнаго зацѣпленія, во вращеніе около оси oY, пересѣкающейся съ первой въ точкѣ o подъ угломъ φ, съ угловой скоростью ω_1 такъ, чтобы отношеніе $\frac{\omega_1}{\omega}$ оставалось всегда постояннымъ.



фиг. 152-я.

Движеніе нѣкоторой неизмѣняемой системы, связанной съ осью oY, относительно таковой же системы, связанной съ осью oX, будетъ, очевидно, слагаться изъ двухъ вращательныхъ движеній: около оси oY съ угловой скоростью ω_1 и около оси oX съ угловой скоростью ω, но въ сторону противоположную данной.

Результирующее движеніе будетъ также движеніе вращательное около оси oc, которая будетъ имѣть направленіе діагонали параллелограма, построеннаго на отрѣзкахъ $ox = -\omega$ и $oy = \omega_1$; при этомъ обѣ угловыя скорости должны быть отложены такъ, чтобы наблюдатель, смотрящій отъ конца къ началу, т. е. отъ X и Y къ o, видѣлъ вращеніе около обѣихъ осей въ одну и ту же сторону. Разсматривая треугольникъ xoc, легко найдемъ:

$$\frac{\omega_1}{sin\alpha} = \frac{\omega}{sin\alpha_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и

$$\alpha + \alpha_1 = \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

откуда ясно, что при данныхъ ω, ω_1 и φ, углы α и α_1 будутъ имѣть постоянное значеніе, слѣдовательно, движеніе системы, связанной съ осью oY, относительно оси oX можетъ быть изображенно каченіемъ усѣченнаго конуса B по усѣченному конусу A. Если два такихъ конуса, выполненныхъ изъ какого-либо матеріала, насадить крѣпко на соотвѣтствующія оси, то движеніе отъ одной оси къ другой можетъ быть передано желаемымъ образомъ при помощи тренія на боковыхъ поверхностяхъ конусовъ. Такая передача называется **конической фрикціонной передачей**. Передача эта обладаетъ тѣми же недостатками, какъ и фрикціонная цилиндрическая передача (§ 51). Чтобы устранить эти недостатки, конусы снабжаются зубцами. Такимъ образомъ получается коническая зубчатая передача. Замѣтимъ, что для одной и той же передачи можно воспользоваться или конусами A и B, или конусами A_1 и B_1, расположенными на продолженіи осей oX и oY въ другую сторону отъ точки o.

Здѣсь, также какъ и въ случаѣ цилиндрической передачи, самымъ существеннымъ вопросомъ является вопросъ о нахожденіи профилей зубцовъ. Самые зубцы представляютъ изъ себя въ данномъ случаѣ коническія поверхности, образуемыя прямыми, проходящими черезъ различныя точки профиля и общую вершину конусовъ o.

Окружности EC и FC основаній конусовъ A и B будутъ, очевидно, лежать на сферѣ, описанной изъ o радіусомъ oC, и при каченіи одного конуса по другому будутъ также катиться одна по другой безъ скольженія. Задача о построеніи профилей зубцовъ сводится, такимъ образомъ, къ построенію взаимно огибающихъ кривыхъ на сферѣ, неизмѣнно связанныхъ соотвѣтственно съ окружностями EC и FC. Точное рѣшеніе такой задачи возможно; но, въ виду его сложности, на практикѣ довольствуются приблизительнымъ рѣшеніемъ, предложеннымъ Tredgold'омъ.

Способъ Tredgold'а заключается въ слѣдующемъ. Проведемъ къ упомянутой выше сферѣ въ точкѣ C касательную плоскость; плоскость эта изобразится на плоскости фигуры 152 прямою o_1o_2, перпендикулярной къ oC. Если мы вообразимъ, что отрѣзки этой прямой o_1C и o_2C связаны соотвѣтственно неизмѣнно съ осями oX и oY, то при вращеніи послѣднихъ отрѣзокъ o_1C опишетъ конусъ Eo_1C, дополнительный конусу

oEC, а отрѣзокъ o_2C опишетъ конусъ Co_2F, дополнительный конусу oCF, такъ какъ

$$\angle Co_1E + \angle EoC = \angle CoF + Co_2F = 180^\circ.$$

Такъ какъ высота зубцовъ очень незначительна въ сравненіи съ радіусомъ сферы и профили ихъ занимаютъ очень узкую сферическую полосу, то можно съ достаточной точностью допустить, что эта полоса лежитъ не на сферѣ, а на поверхности дополнительнаго конуса. Отъ такого предположенія получается та выгода, что профили переносятся съ неразвертываемой на плоскости сферы на поверхность развертываемую. Сдѣлаемъ далѣе еще одно допущеніе, упрощающее рѣшеніе задачи. Легко видѣть, что соприкосновеніе зубцовъ происходитъ на небольшомъ разстояніи въ ту и другую сторону отъ точки C, лежащей на касательной плоскости o_1Co_2: по одну сторону точки C зубцы приходятъ въ зацѣпленіе и по другую расцѣпляются. Такимъ образомъ, только одна точка линіи зацѣпленія, именно точка C, лежитъ въ касательной плоскости. Но такъ какъ размѣры зубцовъ всегда очень незначительны и линія зацѣпленія располагается по обѣ стороны точки C, то можно допустить, что зацѣпленіе происходитъ въ касательной плоскости. Не трудно видѣть, что движеніе при этомъ будетъ происходить такъ, какъ будто бы оно передавалось при помощи цилиндрическихъ колесъ радіусовъ $o_1C = R$ и $o_2C = R_1$, вращающихся въ касательной плоскости o_1Co_2 около осей, проходящихъ черезъ точки o_1 и o_2. Теперь, сдѣлавъ такія допущенія, перейдемъ къ изложенію способа построенія профилей зубцовъ.

Развернемъ поверхности дополнительныхъ конусовъ на плоскости чертежа; тогда они представятся въ видѣ двухъ круговыхъ секторовъ радіусовъ R и R_1. Углы этихъ секторовъ Θ и Θ_1 опредѣлятся изъ слѣдующихъ очевидныхъ равенствъ:

$$R\Theta = 2\pi r \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

и

$$R_1\Theta_1 = 2\pi r_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4),$$

гдѣ r и r_1 суть радіусы основаній конусовъ A и B.

Отсюда имѣемъ:

$$\Theta = \frac{2\pi r}{R} \text{ и } \Theta_1 = \frac{2\pi r_1}{R_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Разсматривая прямоугольные треугольники oCo_1 и oCo_2, найдемъ:

$$r = R\cos\alpha \quad \text{и} \quad r_1 = R_1\cos\alpha_1.$$

Подставляя эти выраженія въ ур-ія (5), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= 2\pi.\cos\alpha \\ \Theta_1 &= 2\pi.\cos\alpha_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Далѣе, вычертимъ на дугахъ секторовъ, по одному изъ указанныхъ для цилиндрическихъ колесъ способовъ, профили зубцовъ и навернемъ эти секторы на поверхности дополнительныхъ конусовъ. Соединяя затѣмъ точки профилей зубцовъ съ точкой o, получимъ и самые зубцы.

Замѣтимъ, что всѣ законы зацѣпленія, выведенные для цилиндрической передачи (§ 52), имѣютъ мѣсто и здѣсь.

Изъ ур-ія 2-го мы имѣемъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} = k \ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

гдѣ k есть передаточное число, если oX—ведущая ось.

Имѣя въ виду, что радіусы основаній конусовъ A и B равны соотвѣтственно r и r_1, легко получить слѣдующее соотношеніе:

$$oC = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{r_1}{\sin\alpha_1},$$

откуда:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

На основаніи этого, изъ равенства (7) найдемъ:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1} \ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

т.е. угловыя скорости обратно пропорціональны радіусамъ начальныхъ окружностей.

Такимъ же образомъ не трудно найти, что

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{z}{z_1} = \frac{n_1}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Здѣсь слѣдуетъ обратить вниманіе еще на работу тренія между зубцами колесъ, которая, какъ мы знаемъ, характеризуется скоростью скольженія одного зубца по другому. Эту скорость можно получить приблизительно, исходя изъ того предположенія, что зацѣпленіе происходитъ въ касательной плоскости, по формулѣ:

$$v = n.u\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right),$$

выведенной нами раньше для плоскаго движенія.

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ

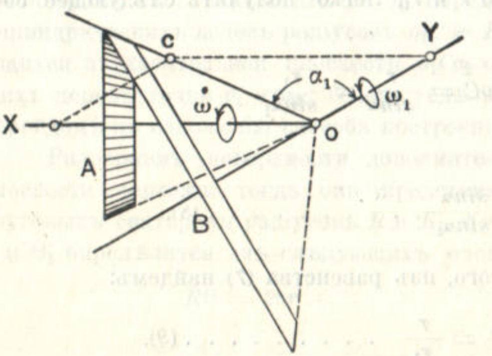
$$R\cos\alpha = r \quad \text{и} \quad R_1\cos\alpha_1 = r_1,$$

то

$$v = n.u\left(\frac{\cos\alpha}{r} + \frac{\cos\alpha_1}{r_1}\right) \dots \dots \dots (11).$$

Эта формула показываетъ, что скорость скольженія зубцовъ коническихъ колесъ меньше, чѣмъ цилиндрическихъ— тѣхъ же радіусовъ. Конечно, она изображаетъ только приблизительно то, что происходитъ въ дѣйствительности.

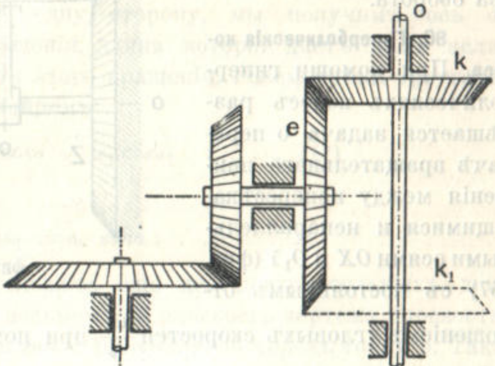
Можетъ случиться, что одинъ изъ угловъ α или α_1 будетъ больше $90°$; въ такомъ случаѣ получится внутреннее коническое зацѣпленіе (фиг. 153). Понятно, что при этомъ угловыя скорости ω_1 и $-\omega$ должны быть отложены по осямъ oY и oX такъ, чтобы наблюдатель, смотрящій отъ X и Y къ o, видѣлъ вращеніе около обѣихъ осей въ одну и ту же сторону.



фиг. 153-я.

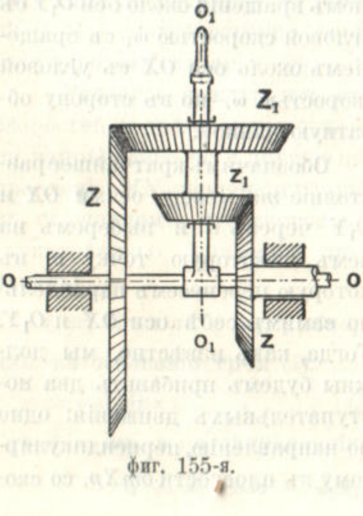
Если ось oc будетъ перпендикулярна къ одной изъ осей oX или oY, то получится зацѣпленіе колеса съ дискомъ.

Возможны сложные механизмы, состоящіе изъ коническихъ зубчатыхъ колесъ. Формулы, выведенныя для сложныхъ механизмовъ, состоящихъ изъ цилиндрическихъ колесъ, имѣютъ мѣсто и здѣсь, съ тою лишь разницей, что направленіе вращенія крайней оси въ рядовомъ соединеніи обусловливается не только числомъ осей, но также и взаимнымъ расположеніемъ колесъ. Такъ напримѣръ, при вращеніи колеса e (фиг. 154) въ опредѣленную сторону, ось oo_1 можетъ вращаться или въ ту или въ другую сторону въ зависимости отъ того, какимъ изъ колесъ—k или k_1 передается къ ней движеніе.



фиг. 154-я.

Для примѣра разсмотримъ случай эпициклическаго соединенія коническихъ колесъ, изображенный на фиг. 155. Здѣсь колесо Z насажено на ось ao крѣпко, а z вольно; оба колеса Z_1 и z_1 сидятъ на ручкѣ a_1o_1 вольно.



фиг. 155-я.

Такъ какъ колеса Z и z относительно ручки вращаются въ разныя стороны, то передаточное число

$$k = -\frac{z_1.Z}{z.Z_1}.$$

Если мы предположимъ, что колесо Z неподвижно, то число оборотовъ колеса z найдемъ по формулѣ (§ 71, форм. 4)

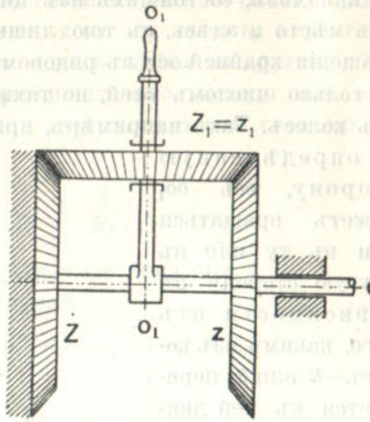
$$n = \left(1 + \frac{z_1.Z}{z.Z_1}\right)l,$$

гдѣ l число оборотовъ ручки

Полагая $Z_1 = z_1$ и $Z = z$, (фиг. 156), найдемъ

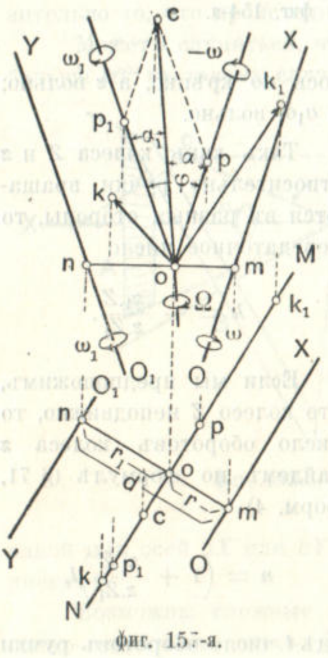
$$n = 2l,$$

т. е. при одномъ оборотѣ ручки колесо z сдѣлаетъ два оборота.



фиг. 156-я.

86. Гиперболическія колеса. При помощи гиперболическихъ колесъ разрѣшается задача о передачѣ вращательнаго движенія между непересѣкающимися и непараллельными осями OX и O_1Y (фиг. 157) съ постояннымъ отношеніемъ угловыхъ скоростей $\frac{\omega_1}{\omega}$ при помощи непосредственнаго соприкосновенія зубцовъ, неизмѣнно соединенныхъ съ осями.



фиг. 157-я.

Найдемъ прежде всего движеніе системы, связанной съ осью O_1Y, относительно системы, связанной съ осью OX. Движеніе это получится, очевидно, сложеніемъ вращенія около оси O_1Y съ угловой скоростью ω_1 съ вращеніемъ около оси OX съ угловой скоростью ω, но въ сторону обратную данной.

Обозначимъ кратчайшее разстояніе mn между осями OX и O_1Y черезъ d и выберемъ на немъ нѣкоторую точку o, въ которую перенесемъ параллельно самимъ себѣ оси OX и O_1Y. Тогда, какъ извѣстно, мы должны будемъ прибавить два поступательныхъ движенія: одно по направленію, перпендикулярному къ плоскости $omXp$, со скоростью $\omega.om = \omega.r$, а другое по направленію, перпендикулярному къ плоскости осей O_1Y и op_1, со скоростью $\omega_1.on. = \omega_1.r_1$.

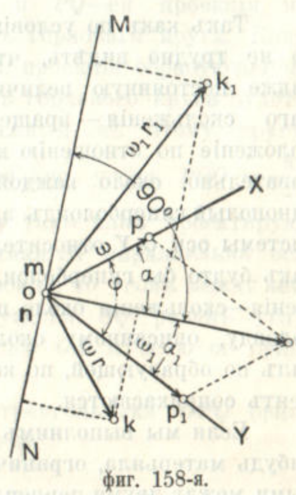
Складывая вращательныя движенія по правилу параллелограмма, стороны котораго op и op_1 равны соотвѣтственнымъ угловымъ скоростямъ, отложеннымъ въ такомъ направленіи, чтобы наблюдатель, смотрящій отъ конца къ началу, видѣлъ вращеніе въ одну сторону, мы получимъ ось oc результирующаго вращенія, длина которой даетъ намъ величину угловой скорости этого вращенія. Разсмотрѣвъ треугольникъ opc, мы легко найдемъ:

$$\Omega = \omega.cos\alpha + \omega_1.cos\alpha_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

и

$$\omega_1.sin\alpha_1 = \omega.\ sin\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Намъ остается сложить еще два поступательныхъ движенія. Для удобства возьмемъ за плоскость чертежа плоскость, перпендикулярную къ mn и проходящую черезъ точку o. Такъ какъ кратчайшее разстояніе mn перпендикулярно къ осямъ OX и O_1Y, то параллелограммъ $opcp_1$ будетъ лежать въ плоскости чертежа (фиг. 158), проекціи осей OX и O_1Y сольются соотвѣтственно съ op и op_1 и скорости поступательныхъ движеній $\omega.r$ и $\omega_1.r_1$ будутъ проектироваться также въ натуральную величину по линіямъ ok и ok_1, соотвѣтственно перпендикулярнымъ къ op и op_1.



фиг. 158-я.

Разлагая каждую изъ этихъ скоростей на двѣ слагающихъ: одну по направленію oc, а другую по направленію MN, перпендикулярному къ oc, найдемъ, что скорость поступательнаго движенія по oc будетъ:

$$v = \omega.r.\ sin\alpha + \omega_1.r_1.\ sin\alpha_1$$

или, на основаніи ур-ія (2),

$$v = \omega.d.sin\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3),$$

гдѣ $d = mn$, а по направленію MN:

$$u = \omega.r.cos\alpha - \omega_1.r_1.cos\alpha_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

До сихъ поръ мы ничѣмъ не ограничивали выбора точки o (фиг. 157). Выберемъ ее такъ, чтобы $u = 0$; тогда изъ ур-ія (4) получимъ:

$$\omega . r . \cos\alpha = \omega_1 . r_1 . \cos\alpha_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Раздѣливъ это равенство почленно на равенство (2), найдемъ:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{tg\alpha}{tg\alpha_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что движеніе системы оси O_1Y относительно системы оси OX сводится къ вращенію около оси oc съ угловой скоростью Ω, опредѣляемой по ур-ію (1), и скольженію вдоль этой же оси со скоростью v, опредѣляемой изъ ур-ія (3).

Положеніе оси oc находится въ каждый моментъ по ур-іямъ (2), (6) и по ур-іямъ:

$$r + r_1 = d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7),$$

$$\alpha + \alpha_1 = \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8).$$

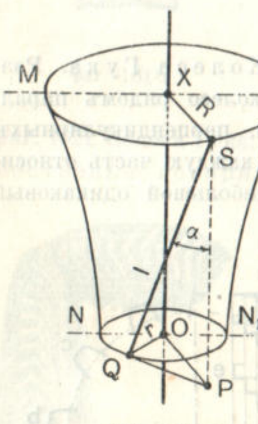
Такъ какъ по условію ω, ω_1 d и φ величины постоянныя, то не трудно видѣть, что и r, r_1, α и α_1 будутъ имѣть также постоянную величину. Отсюда ясно, что ось мгновеннаго скольженія — вращенія будетъ занимать постоянное положеніе по отношенію къ осямъ OX и O_1Y и опишетъ, слѣдовательно, около каждой изъ этихъ осей соотвѣтственный однополый гиперболоидъ вращенія. Такимъ образомъ, движеніе системы оси O_1Y относительно системы оси OX будетъ таково, какъ будто бы гиперболоидъ, описанный мгновенной осью вращенія—скольженія около первой, катился по такому же гиперболоиду, описанному около оси OX, и въ то же время скользилъ по образующей, по которой гиперболоиды въ данный моментъ соприкасаются.

Если мы выполнимъ два такихъ гиперболоида изъ какого-нибудь матерьяла, ограничившись отрѣзками ихъ, заключенными между двумя перпендикулярными къ осямъ плоскостями, насадимъ ихъ крѣпко на соотвѣтственныя оси и нажмемъ одинъ на другой, то можемъ получить требуемую передачу движенія при помощи тренія на ихъ боковыхъ поверхностяхъ.

Такая передача называется **гиперболической фрикціонной передачей.**

Чтобы сдѣлать передачу независимой отъ тренія, гиперболоиды снабжаются зубцами. Однако же до настоящаго времени задача о построеніи профилей зубцовъ гиперболическихъ колесъ не имѣетъ удовлетворительнаго рѣшенія, поэтому мы и не будемъ на ней останавливаться. Передача вращательнаго движенія между двумя непараллельными и непересѣкающимися осями осуществляется обыкновенно при помощи двухъ паръ коническихъ колесъ, ибо понятно, что всегда можно провести прямую, пересѣкающую двѣ другихъ прямыхъ. Замѣтимъ только, что гиперболическая зубчатая передача представляетъ еще ту особенность, что шаги зацѣпленія обоихъ колесъ, т. е. разстоянія между одноименными точками зубцовъ по окружностямъ, которыя получаются въ пересѣченіи гиперболоидовъ съ плоскостями, перпендикулярными къ ихъ осямъ, не равны между собою.

Пусть MM_1 (фиг. 159) есть какое нибудь сѣченіе гиперболоида плоскостью, перпендикулярною къ оси OX, NN_1—горловой кругъ, SQ—образующая гиперболоида и PQ—ея проекція на плоскость горловаго круга. Какъ извѣстно, проекція образующей на плоскость горлового круга будетъ **касательной** къ этому кругу, слѣдовательно, уголъ $PQO = \frac{\pi}{2}$.



фиг. 159-ая.

Далѣе, такъ какъ проектирующая прямая SP параллельна оси гиперболоида, то уголъ между нею и образующей SQ равенъ углу между осью OX и осью oc (фиг. 157).

Изъ треугольника OPQ (фиг. 159) имѣемъ:

$$R = \sqrt{r^2 + l^2 \sin^2\alpha} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (9)$$

гдѣ $R = \overline{OP}$ и $l = \overline{SQ}$.

Такъ какъ числа зубцовъ обратно пропорціональны угловымъ скоростямъ, то принимая во вниманіе ур-іе *(2)*, мы можемъ написать:

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{sin\alpha}{sin\alpha_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Обозначая шаги соотвѣтственно черезъ t и t_1, найдемъ:

$$t = \frac{2\pi R}{z} \text{ и } t_1 = \frac{2\pi R_1}{z_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11);$$

откуда, на основаніи ур-ій *(9)* и *(10)*, получимъ:

$$\frac{t}{t_1} = \frac{sin\alpha_1}{sin\alpha} \cdot \sqrt{\frac{r^2 + l^2 sin^2\alpha}{r_1^2 + l^2 sin^2\alpha_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

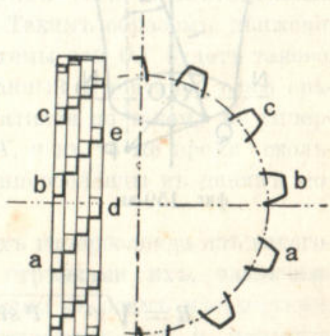
Принимая во вниманіе ур-іе *(6)* и полагая $l = o$, для горлового круга получимъ:

$$\frac{t}{t_1} = \frac{cos\alpha_1}{cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13);$$

полагая $l = \infty$, найдемъ:

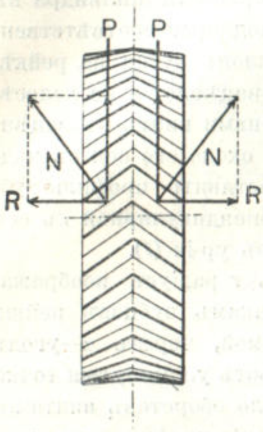
$$t = t_1.$$

87. Колеса съ винтовыми зубцами. Колеса Гука. Разрѣжемъ обыкновенное цилиндрическое колесо рядомъ параллельныхъ эквидистантныхъ плоскостей, перпендикулярныхъ оси, на нѣсколько частей и повернемъ каждую часть относительно рядомъ стоящей на нѣкоторый небольшой одинаковый уголъ въ одну и ту же сторону; тогда колесо приметъ видъ, изображенный схематически на фиг. 160. Цѣль такого видоизмѣненія цилиндрическихъ колесъ заключается въ болѣе плавной передачѣ движенія. Дѣйствительно, если трудно иногда достигнуть, чтобы три зубца a, b и c одного колеса находились въ одновременномъ зацѣпленіи, то при указанномъ преобразованіи легко, например, достигнуть, чтобы одно-

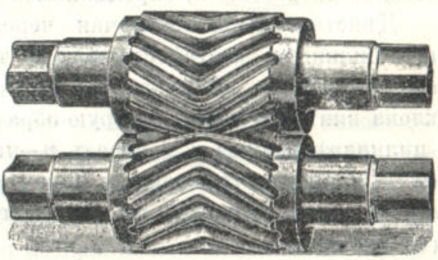


фиг. 160-ая.

временно зацѣплялись четыре зубца a, b, d и e. Увеличивая число дѣленій до безконечности и поворачивая каждую часть относительно сосѣдней на безконечно-малый уголъ, мы преобразуемъ цилиндрическій зубецъ въ винтовой. При винтовыхъ зубцахъ передача движенія становится еще болѣе плавною, чѣмъ при ступенчатыхъ; однако же винтовые зубцы имѣютъ то неудобство, что давленіе между ними даетъ слагающую вдоль оси. Если зубецъ будетъ составленъ изъ двухъ винтовыхъ поверхностей, пересѣкающихся въ средней плоскости колеса (фиг. 161), тогда, очевидно, слагающія давленія по оси на обѣ половины зубца взаимно уравновѣшиваются. Такія колеса и называются, по имени изобрѣтателя, колесами Гука (фиг. 162). Колеса Гука, собственно говоря, представляютъ собою плоскій механизмъ, но мы описываемъ ихъ здѣсь, въ виду связи съ послѣдующими механизмами. Очевидно, что такимъ же образомъ можно преобразовать и коническія колеса (фиг. 163).



фиг. 161-я.


фиг. 162-я.


фиг. 163-я.

Червячная передача. Преобразуя вышеуказаннымъ способомъ колесо и зубчатую рейку, мы получимъ, очевидно, на колесѣ винтовые зубцы, а на рейкѣ наклонные. Если колесо вращается съ угловой скоростью ω_1 и радіусъ его начальной окружности $= r_1$, то рейка и, слѣдовательно, профили ея зубцовъ, какъ мы видѣли (§ 70), будутъ перемѣщаться со скоростью

$$u = \omega_1 r_1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . (1).$$

Положимъ, что мы, взявши рейку съ косыми зубьями, уничтожили на ней всѣ зубцы, кромѣ одного, и свернули ее въ цилиндръ около оси, параллельной начальной ея прямой. Зубецъ, очевидно, расположится на поверхности цилиндра въ видѣ винтовой нарѣзки, шагъ которой, подбирая соотвѣтственнымъ образомъ радіусъ цилиндра и наклонъ зубца на рейкѣ, можно всегда сдѣлать равнымъ шагу зацѣпленія на колесѣ. Если мы приведемъ теперь полученный нами винтъ въ зацѣпленіе съ колесомъ, то, вращая винтъ около его оси съ надлежащей угловой скоростью, можемъ заставить профиль зубцовъ перемѣщаться въ плоскости, перпендикулярной къ оси колеса, со скоростью u, опредѣляемой изъ ур-ія (*1*).

Дѣйствительно, обозначая черезъ r радіусъ воображаемаго цилиндра, соотвѣтствующаго точкамъ зубцовъ рейки, располагающимся на начальной ея прямой, черезъ α—уголъ наклона винтовой линіи, которую образуютъ упомянутыя точки на цилиндрѣ радіуса r, и черезъ n—число оборотовъ винта въ минуту, найдемъ, что скорость перемѣщенія профилей въ плоскости, перпендикулярной къ оси колеса, выразится слѣдующимъ образомъ:

$$u = \frac{2\pi r . tg\alpha . n}{60} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Сравнивая ур-іе (*1*) и (*2*) и принимая во вниманіе, что

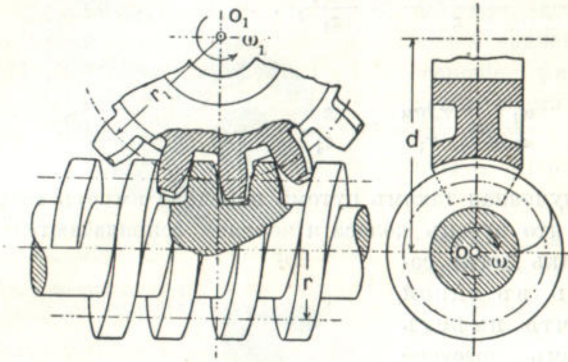
$$\frac{2\pi . n}{60} = \omega \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . (3),$$

гдѣ ω угловая скорость винта, найдемъ:

$$k = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r tg\alpha}{r_1} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4).$$

Итакъ, послѣдовательнымъ преобразованіемъ зацѣпляющихся между собою рейки и колеса мы пришли къ новой передачѣ, называемой червячной (фиг. 164) (цилиндръ съ навернутымъ на него зубцомъ называется червякомъ), служащей для передачи вращательнаго движенія между осями перпендикулярными, но не пересѣкающимися. Для разсчета этой передачи нужно принимать во вниманіе, кромѣ ур-ія (*4*), еще слѣдующее ур-іе:

$$r + r_1 = d \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(5),$$



Фиг. 164-я.

гдѣ d—кратчайшее разстояніе между осями. Что касается до угла α, то онъ опредѣляется условіями динамическими, которыя будутъ выяснены въ курсѣ „общей теоріи машинъ". Зубцы на червякѣ въ меридіональной плоскости и на колесѣ, какъ мы видѣли, очерчиваются по правиламъ зацѣпленія колеса съ зубчатой рейкой.

Выведемъ еше одно соотношеніе, которое позволитъ намъ обобщить червячную передачу.

Мы говорили выше, что шагъ винтового хода червяка долженъ равняться шагу зацѣпленія на червячномъ колесѣ. Обозначая число зубцовъ на колесѣ черезъ z_1, имѣемъ

$$2\pi r . tg\alpha = \frac{2\pi r_1}{z_1} \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(5),$$

откуда, принимая во вниманіе ур-іе (*4*), найдемъ:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r . tg\alpha}{r_1} = \frac{1}{z_1} \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;. \;(6).$$

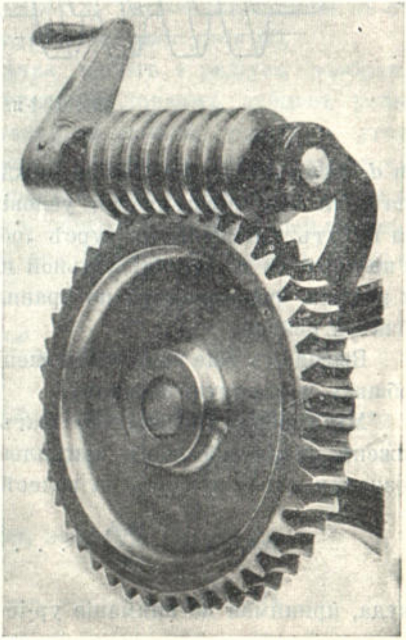
Допустимъ, что мы взяли на рейкѣ не одинъ зубецъ, а z зубцовъ, и затѣмъ свернули рейку въ цилиндръ. Очевидно, мы получимъ на червякѣ z винтовыхъ ходовъ; но для правильнаго зацѣпленія надо, чтобы разстояніе между смежными ходами было равно шагу зацѣпленія. Такъ какъ это разстояніе равно $\frac{1}{z}$ части шага каждаго хода, то мы имѣемъ:

$$\frac{2\pi r.tg\alpha}{z} = \frac{2\pi r_1}{z_1} \dots \dots \dots (7)$$

и

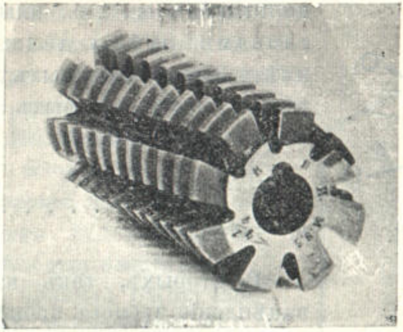
$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r.tg\alpha}{r_1} = \frac{z}{z_1} \dots \dots \dots (8).$$

Полученная такимъ путемъ передача имѣетъ тотъ недостатокъ, что зубецъ колеса и червяка соприкасаются между собою, какъ легко сообразить, въ одной точкѣ, что имѣетъ слѣдствіемъ быстрое снашиваніе зубцовъ. Чтобы достигнуть болѣе тѣснаго соприкосновенія между зубцами, въ настоящее время зубцы колеса въ меридіональной плоскости ограничиваютъ не прямыми линіями, а окружностями, концентрическими съ червякомъ (фиг. 164 и 165). Задача вычерчиванія такихъ зубцовъ весьма сложна; но изготовленіе подобной червячной передачи облегчается въ настоящее время тѣмъ, что зубцы червячнаго колеса нарѣзаются непосредственно червякомъ, обращеннымъ во фрезъ (фиг. 166). При нарѣзкѣ колесо и червякъ приводятся во вращательное движеніе съ угловыми ско-



фиг. 165-я.

ростями, соотвѣтствующими ур-ію *(4)*, причемъ, по мѣрѣ нарѣзанія зубцовъ на колесѣ, оси ихъ сближаются. Если зубцы на колесѣ очерчены по разверткѣ окружности, а на червякѣ имѣютъ форму соотвѣтствующей трапеціи, то измѣненіе разстоянія между осями не вліяетъ на форму нарѣзываемыхъ зубцовъ.



фиг. 166-я.

Винтовыя колеса. Для передачи вращательнаго движенія между осями не параллельными и непересѣкающимися пользуются иногда приблизительно выполненной гиперболической передачею, замѣняя гиперболоиды цилиндрами, діаметры которыхъ дѣлаютъ равными діаметрамъ соотвѣтствующихъ горловыхъ круговъ (фиг. 167).

фиг. 167-я.

Пусть плоскость чертежа (фиг. 168) есть плоскость, перпендикулярная къ кратчайшему разстоянію между осями колесъ OX и O_1Y, а oc —соотвѣтствующая мгновенная ось вращенія—скольженія. Если дано отношеніе угловыхъ скоростей $\frac{\omega_1}{\omega}$, кратчайшее разстояніе между осями d и уголъ между ними φ, то по предыдущему (§ 86) имѣемъ:

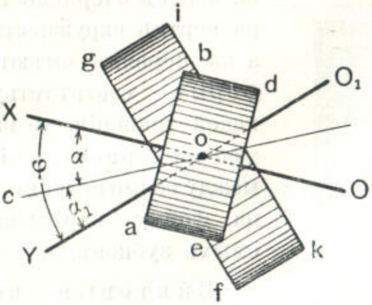
$$\omega . \sin\alpha = \omega_1 . \sin\alpha_1 \; . \; . \; . \; . \; . (1); \quad \frac{r}{r_1} = \frac{tg\alpha}{tg\alpha_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (2);$$

$$r + r_1 = d \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (3), \text{ и } \alpha + \alpha_1 = \varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (4),$$

откуда найдемъ α, α_1, r и r_1. Если, кромѣ того, обозначимъ шаги зубцовъ по окружностямъ основаній цилиндровъ $abde$ и $fgik$ соотвѣтственно черезъ t и t_1, то должны имѣть:

$$t . \cos\alpha = t_1 . \cos\alpha_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (5).$$

Чтобы выяснить форму зубцовъ, замѣтимъ, что движеніе одного начальнаго цилиндра относительно другого сводится къ вращенію около оси *oc* и скольженію вдоль нея. На основаніи этого, во-первыхъ, *oc* должна быть общей касательной къ зубцамъ въ точкѣ касанія цилиндровъ *o*, т. е., иными словами, зубцы должны имѣть форму винтовыхъ нарѣзокъ, шаги которыхъ соотвѣтственно равны:



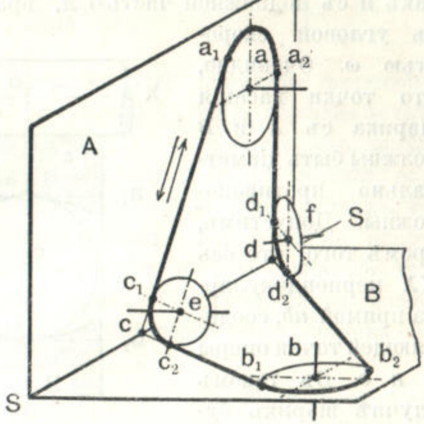
фиг. 168-я.

$$\left.\begin{aligned} h &= 2\pi r . ctg\alpha \\ h_1 &= 2\pi r_1 . ctg\alpha_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6).$$

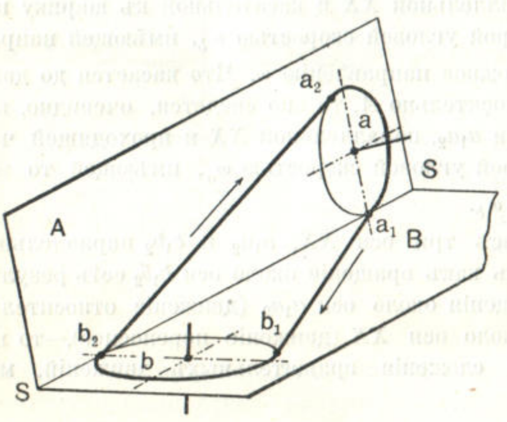
Во-вторыхъ, такъ какъ зацѣпленіе зубцовъ происходитъ въ плоскости перпендикулярной къ *oc* и проходящей черезъ точку *o*, то въ этой плоскости они должны быть очерчены по правиламъ цилиндрической передачи, какъ зубцы колесъ радіусовъ $\frac{r}{cos^2\alpha}$ и $\frac{r_1}{cos^2\alpha_1}$. Дѣйствительно, упомянутая плоскость зацѣпленія пересѣчетъ начальные цилиндры по эллипсамъ, малыя полуоси которыхъ будутъ равны соотвѣтственно r и r_1, а большія— $\frac{r}{cos\alpha}$ и $\frac{r_1}{cos\alpha_1}$; эллипсы эти соприкасаются въ точкѣ *o* точками, соотвѣтствующими концамъ малыхъ полуосей; поэтому въ качествѣ начальныхъ окружностей мы и должны взять окружности кривизны эллипсовъ въ этихъ точкахъ.

88. Ременная передача. При устройствѣ ременной передачи между непараллельными осями нужно соблюдать слѣдующее правило, значеніе котораго было выяснено въ § 81: средняя линія набѣгающей части ремня должна лежать въ средней плоскости шкива.

Для удобства будемъ разсматривать вмѣсто ремня его среднюю линію, а вмѣсто шкива окружность. Въ самомъ общемъ случаѣ ременная передача между непараллельными осями можетъ быть устроена слѣдующимъ образомъ. Пусть *a* и *b*—шкивы и *A* и *B*—ихъ плоскости (фиг. 169). Возьмемъ на линіи пересѣченія этихъ плоскостей *SS* двѣ произвольныхъ точки *c* и *d* и проведемъ изъ нихъ касательныя къ шкивамъ, а затѣмъ въ плоскости, образуемой касательными da_2 и db_2 помѣстимъ направляющій шкивъ f, а въ плоскости касательныхъ ca_1 и cb_1 направляющій шкивъ e. Если мы обогнемъ всѣ четыре шкива ремнемъ $a_1c_1c_2b_1b_2d_2d_1a_2a_1$, то, очевидно, передача окажется возможной въ обѣ стороны, такъ какъ при этомъ будетъ всегда соблюдено вышеуказанное правило. Въ случаѣ осей непересѣкающихся (фиг. 170) можно устроить передачу и безъ направляющихъ шкивовъ. Дѣйствительно, если мы передвинемъ шкивы a и b въ ихъ плоскостяхъ до соприкосновенія съ SS, то передача становится возможной при перемѣщеніи ремня по направленію стрѣлокъ, ибо часть его a_1b_1, набѣгающая на шкивъ b, лежитъ въ плоскости B, а часть b_2a_2, набѣгающая на шкивъ a, лежитъ въ плоскости A. Отсюда вытекаетъ такое правило: **при передачѣ между осями непараллельными и непересѣкающимися ремень долженъ оставлять шкивы въ точкахъ касанія ихъ съ линіей пересѣченія ихъ плоскостей.**

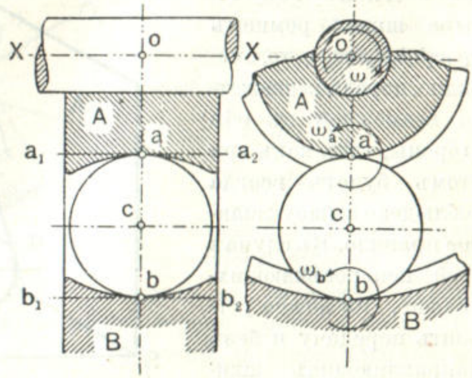


фиг. 169-я.



фиг. 170-я.

89. Движеніе шариковъ въ подшипникахъ и подпятникахъ. Разсмотримъ сначала тотъ случай, когда шарикъ имѣетъ по одной точкѣ касанія какъ съ неподвижною опорой B (фиг. 171), такъ и съ подвижной частью A, вращающейся около оси XX съ угловой скоростью ω. Очевидно, что точки касанія шарика съ A и B должны быть діаметрально противоположны. Допустимъ, кромѣ того, что ось XX перпендикулярна прямой ab, соединяющей точки опоры a и b. Въ такомъ случаѣ шарикъ будетъ катиться по опорѣ B, вращаясь



фиг. 171-я.

около оси b_1b_2, параллельной XX и касательной къ шарику въ точкѣ b, съ нѣкоторой угловой скоростью ω_b, имѣющей направленіе противоположное направленію ω. Что касается до движенія шарика относительно A, то оно сведется, очевидно, къ вращенію около оси a_1a_2, параллельной XX и проходящей черезъ a, съ нѣкоторой угловой скоростью ω_a, имѣющей то же направленіе, что и ω_b.

Такъ какъ всѣ три оси XX, a_1a_2 и b_1b_2 параллельны между собою и такъ какъ вращеніе около оси b_1b_2 есть результатъ сложенія вращенія около оси a_1a_2 (движеніе относительное) и вращенія около оси XX (движеніе переносное),—то на основаніи правилъ сложенія вращательныхъ движеній, мы имѣемъ:

$$\omega_b = \omega_a - \omega \; . \; . \; . \; . \; . \; (1) \quad \text{и} \quad \omega_a . ab = \omega . ob \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

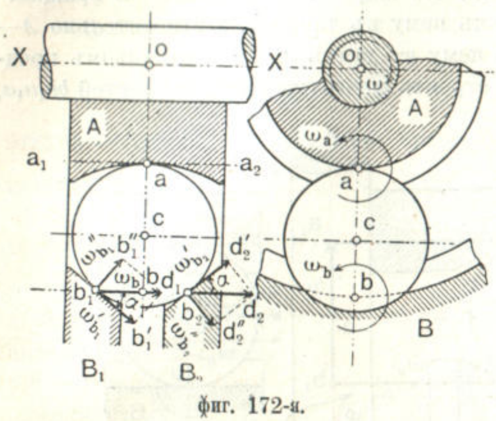
откуда легко найдемъ:

$$\omega_a = \omega . \frac{ob}{ab} \; . \; . \; . \; . \; . \; (3) \quad \text{и} \quad \omega_b = \omega . \frac{oa}{ab} \; . \; . \; . \; . \; . \; (4).$$

Центръ шарика c будетъ вращаться около оси XX съ нѣкоторой угловою скоростью ω_0, которая легко найдется изъ сравненія линейной скорости c по отношенію къ B и оси XX, именно:

$$\omega_0 = \omega_b . \frac{bc}{oc} = \omega . \frac{bc.oa}{oc.ab} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5).$$

Разсмотрѣнный нами случай, гдѣ движеніе шариковъ, какъ мы видѣли, сводится къ чистому каченію, изрѣдка встрѣчающійся въ подшипникахъ, имѣетъ то неудобство, что, вслѣдствіе снашиванія опорныхъ поверхностей и отсутствія возможности сближать ихъ, подшипникъ скоро приходитъ въ негодное состояніе. Въ виду этого чаще неподвижную опору, или подвижную, или, наконецъ, и ту и другую дѣлаютъ изъ двухъ частей (фиг. 172). Сближая эти отдѣльныя части, можно всегда установить надлежащее соприкосновеніе шарика съ опорами.



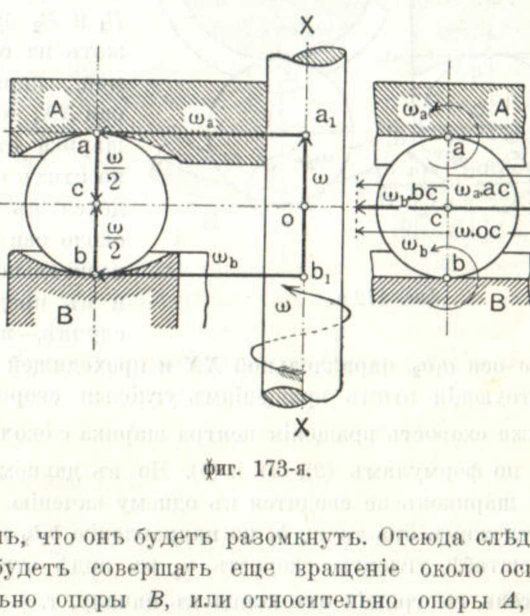
фиг. 172-я.

Если точки соприкосновенія шарика b_1 и b_2 съ неподвижными опорами B_1 и B_2 будутъ лежать на одной прямой, параллельной оси XX, то движеніе шарика относительно этихъ опоръ сведется къ вращенію около оси b_1b_2, а относительно A, какъ и въ предыдущемъ случаѣ,—къ вращенію около оси a_1a_2, параллельной XX и проходящей черезъ a. Соотвѣтствующія этимъ вращеніямъ угловыя скорости ω_b и ω_a, а также скорость вращенія центра шарика c около оси XX, найдутся по формуламъ (3), (4) и (5). Но въ данномъ случаѣ движеніе шариковъ не сводится къ одному каченію. Дѣйствительно, отложимъ отъ точки b_1 по направленію b_1b_2 въ нѣкоторомъ масштабѣ угловую скорость ω_b въ видѣ отрѣзка b_1d_1. Наблюдатель, смотрящій отъ конца къ началу, т. е. отъ d_1 къ b_1, будетъ видѣть вращеніе по стрѣлкѣ часовъ. Очевидно мы можемъ разложить b_1d_1 на двѣ составляющихъ: одну по направленію опоры $b_1b'_1$ и другую по перпендикуляру къ ней $b_1b''_1$. Такимъ образомъ, движеніе шарика относительно опоры B_1 сведется къ каченію по ней, т. е. къ вращенію около оси $b_1b'_1$, и къ вращенію около оси, перпендикулярной къ ней. Таково же будетъ движеніе шарика относительно опоры B_2. Легко видѣть, что

$$\omega'_{b1} = \omega'_{b2} = \omega_b.cos\alpha. \;.\;.\; (6) \text{ и } \omega''_{b1} = \omega''_{b2} = \omega_b.sin\alpha. \;.\;.\; (7).$$

Направленія вращеній около всѣхъ этихъ осей опредѣляется тѣмъ, что наблюдатель, смотрящій отъ конца къ началу, видитъ вращеніе по стрѣлкѣ часовъ.

Разсмотримъ далѣе тотъ случай, когда шарикъ опирается на A и B (фиг. 173) концами діаметра, параллельнаго оси вращенія XX подвижной опоры A. Это будетъ случай подпятника. Предположимъ, что шарикъ относительно B вращается около касательной къ нему въ точкѣ b, а относительно A— около касательной къ нему въ точкѣ a. Если въ такомъ предположеніи мы будемъ строить многоугольникъ скоростей bb_1a_1a,



фиг. 173-я.

то увидимъ, что онъ будетъ разомкнутъ. Отсюда слѣдуетъ, что шарикъ будетъ совершать еще вращеніе около оси ab или относительно опоры B, или относительно опоры A, или, наконецъ, относительно и той, и другой. Чтобы рѣшить, которое изъ этихъ трехъ предположеній соотвѣтствуетъ дѣйствительности, найдемъ ω_a, ω_b и угловую скорость ω_0 вращенія центра шарика c около оси XX.

Линейная абсолютная скорость центра шарика слагается изъ скорости относительной и скорости той точки системы A, которая совпадаетъ въ данный моментъ съ c. Такъ какъ всѣ эти три скорости имѣютъ одно направленіе, то мы найдемъ:

$$\omega_b . bc = \omega . oc - \omega_a . ac \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Такъ какъ $\omega_a = \omega_b$, что видно изъ многоугольника скоростей, то на основаніи ур-ія *(8)*

$$\omega_a = \omega_b = \frac{\omega .\, oc}{ab} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

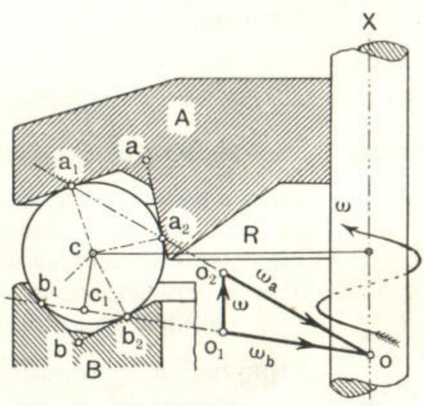
т. е. если мы положимъ $\omega = b_1 a_1$, то въ томъ же масштабѣ $\omega_a = \omega_b = oc$.

Далѣе, легко видѣть, что

$$\omega_0 = \omega_b . \frac{bc}{oc} = \frac{\omega}{2} \quad \ldots\ldots \quad (10),$$

откуда слѣдуетъ, что шарикъ вращается около оси ab и относительно A и относительно B съ угловой скоростью $\frac{\omega}{2}$.

Откладывая отъ a внизъ $ac = \frac{\omega}{2}$ и отъ b вверхъ $bc = \frac{\omega}{2}$, мы и получимъ замкнутый многоугольникъ угловыхъ скоростей. Въ случаѣ, изображенномъ на фиг. 174, который одинаково примѣнимъ и къ подшипнику и къ подпятнику, оси b_1b_2 и a_1a_2, чтобы шарикъ не скользилъ, должны пересѣкаться въ одной точкѣ o на оси XX. Величины и направленія угловыхъ скоростей ω_b и



фиг. 174-я.

ω_a легко находятся построеніемъ треугольника o_1o_2o, гдѣ o_1o_2 въ извѣстномъ масштабѣ изображаетъ данную угловую скорость ω. Направленіе ω_b въ треугольникѣ, какъ скорости результирующей, должно быть встрѣчнымъ направленію двухъ другихъ скоростей. Легко также при помощи разложенія скоростей ω_a и ω_b найти скорости каченія шарика по опорамъ a_1a, a_2a, b_1b и b_2b и скорости вращенія его около осей, нормальныхъ къ опорамъ. Угловая скорость вращенія центра шарика ω_0 около оси XX выразится, очевидно, слѣдующимъ образомъ:

$$\omega_0 = \omega_b . \frac{cc_1}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11),$$

гдѣ cc_1—длина перпендикуляра изъ c на b_1b_2, а R—длина перпендикуляра изъ c на XX.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Замѣченныя ошибки въ текстѣ и на фигурахъ.

Стр. 55, строка 39: написано „дальнѣйшего“, надо „дальнѣйшаго“.

Стр. 61, строка 5: написано „ведущего“, надо „ведущаго“.

На фигурѣ 15-ой на пересѣченіи прямыхъ oR и M_1N_1 пропущена буква R_1.

На фигурѣ 82-ой пропущена прямая RT.

Дополнительный списокъ замѣченныхъ ошибокъ

	Написано	Надо
Стр. 12, строка 26:	$x_1 = Oa_2 = 2resin\beta$ $y_1 = a_2a = 2recos\beta$	$x_1 = Oa_2 = 2rsin\beta$ $y_1 = a_2a = 2rcos\beta$
Стр. 30, строка 26:	$\overset{\smile}{mn} = s_1\overset{\frown}{k_1}$	$\overset{\smile}{mn} = \rho_1\overset{\frown}{k_1}$
Стр. 59, строка послѣд.:	$= J_t \dfrac{dv_1}{dt}$	$J_t = \dfrac{dv_1}{dt}$
Стр. 125, строка 5:	въ разныя стороны	въ одну сторону
Стр. 134, строка 1:	полуоси	оси
Стр. 136, строка 9:	$r\dfrac{d\varphi}{dr} = r_1\dfrac{d\varphi_1}{dr_1}$	$r\dfrac{d\varphi}{dr} = -r_1\dfrac{d\varphi_1}{dr_1}$
Стр. 137, строка 12:	cfa	cFa
Стр. 151, строка 11:	$-(\rho)_{\rho=0}$	$-(\rho)_{\varphi=0}$
Стр. 155, строка послѣд.:	$\dfrac{\omega_1}{\omega_{n+1}} - (-1)^n \dfrac{Z_n}{z_1}$	$\dfrac{\omega_1}{\omega_{n+1}} = (-1)^n \dfrac{Z_n}{z_1}$

Цѣна 2 руб. 75 к.